

EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2016

Critérios de correção

Parte 1

- **Como entender os critérios de correção.**

1. O valor total de cada questão é 1 ponto.
2. As questões são divididas em itens denotados por letras (a, b, c, ...). O valor de cada item é mostrado em **vermelho no início do item**.
3. O valor dos passos intermediários necessários para a resolução de cada item é mostrado em **azul imediatamente após o passo**. Para que cada passo intermediário seja considerado correto, é preciso que o raciocínio que leva ao resultado parcial esteja completo e correto.
4. Respostas “secas”, sem justificativas não foram aceitas.

Q1. (a) **(0,1 pontos)** Sim, pois a única força capaz de gerar o torque para que a esfera role sem deslizar é o atrito. As seguintes alternativas também foram aceitas:

- Sim, pois se não houvesse atrito a bola apenas deslizaria.
- Sim, pois se não houvesse atrito a mesma não rolaria.
- Sim, pois a esfera desce sem deslizar.

(b) **(0,1 pontos)** Sim, pois o atrito é estático e não realiza trabalho, uma vez que a velocidade do ponto de contato entre a esfera e o plano inclinado é nula (rolamento sem deslizamento). Também foi aceita a seguinte alternativa: Sim, pois a esfera rola sem deslizar.

(c) **(0,4 pontos)** Tomando a base do plano como o zero de energia potencial gravitacional, a energia mecânica inicial é apenas potencial gravitacional, dada por $E_i = mgh$. Na base do plano inclinado, a energia mecânica é puramente cinética, dada pela energia cinética de translação do centro de massa (CM) mais a energia de rotação em torno do CM, ou seja, $E_f = mv^2/2 + I\omega^2/2$, onde v e ω são, respectivamente, as velocidades de translação do CM e angular na base do plano. Por conservação de energia mecânica,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (0,2 \text{ pontos}) \quad (1)$$

Como há rolamento sem deslizamento, a velocidade de translação do CM e a velocidade de rotação satisfazem $v = \omega r$ **(0,1 pontos)**. Substituindo na Eq. (1) e usando a expressão para o momento de inércia dada no enunciado obtemos

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}. \quad (0,1 \text{ pontos})$$

Notas parciais foram atribuídas também nos seguintes casos:

- Energia inicial (E_i) correta, energia final (E_f) correta, mas não considerou $E_i = E_f$ e, portanto, não chegou ao v correto. **(0,2 pontos)**
- E_i correta, energia cinética final (E_f) correta, usou $v = \omega r$ corretamente, mas considerou o trabalho do atrito como não-nulo. **(0,2 pontos)**
- Apenas E_f correta. **(0,1 pontos)**
- Considerou $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + m\omega^2$ e prosseguiu corretamente. **(0,2 pontos)**
- Considerou $mgh = L^2/2I + p^2/2m$, com L incorreto. **(0,1 pontos)**

(d) **(0,4 pontos)** Definimos um sistema de coordenadas com um eixo x paralelo ao plano inclinado e apontando para a base do plano e um eixo y perpendicular ao plano e apontando para cima do plano. A força resultante no eixo y é nula. No eixo x , usando a segunda lei de Newton,

$$mg \sin \theta - f_{at} = ma, \quad (0,1 \text{ pontos}) \quad (2)$$

onde f_{at} é a força de atrito e a a aceleração do CM. Para o movimento de rotação

$$\tau = f_{at}r = I\alpha, \quad (0,1 \text{ pontos}) \quad (3)$$

onde τ é o torque em relação a um eixo que passa pelo CM da esfera e α é sua aceleração angular. Derivando em relação ao tempo a expressão do item anterior, $v = \omega r$, obtemos $a = \alpha r$. Levando esta última relação e a Eq. (2) na Eq. (3) obtemos

$$(mg \sin \theta - ma)r = \frac{2}{5}mr^2 \frac{a}{r},$$

donde

$$a = \frac{5}{7}g \sin \theta. \quad (0,1 \text{ pontos}) \quad (4)$$

Dado que a é constante, podemos usar a seguinte relação, válida para um movimento uniformemente acelerado,

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta x \\ &= 2ah/\sin \theta, \end{aligned} \quad (5)$$

onde $v_0 = 0$ é a velocidade no instante inicial e $\Delta x = h/\sin \theta$ o deslocamento no eixo x . Levando a Eq. (4) na Eq. (5)

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7}gh},} \quad (0,1 \text{ pontos})$$

que coincide com o resultado já encontrado no item (c).

As seguintes alternativas também foram aceitas:

- Se usou $v = at$ e $\Delta x = at^2/2$, ao invés da Eq. (5).
- Se utilizou $a = dv/dt = vdv/dx$ e integrou em dv e dx , ao invés da Eq. (5).
- Se calculou o torque em relação a um eixo que passa pelo ponto de contato e usou o teorema dos eixos paralelos para determinar o momento de inércia em relação a este eixo.

Notas parciais foram atribuídas nos seguintes casos:

- Se calculou o torque em relação a um eixo que passa pelo ponto de contato, mas não usou o teorema dos eixos paralelos para determinar o momento de inércia em relação a este eixo. (0,2 pontos)
- Se usou que $f_{at} = \mu mg \cos \theta$ e assim determinou v em função de μ . (0,2 pontos)

- Q2. (a) **(0,3 pontos)** Utilizaremos como coordenada generalizada o ângulo θ que a haste faz com a vertical. O módulo da velocidade da partícula é dado por $v = l\dot{\theta}$, de modo que sua energia cinética é

$$T = \frac{m(l\dot{\theta})^2}{2}. \quad (0,1 \text{ pontos})$$

A altura na vertical, em relação à posição em que $\theta = 0$, é dada por $h = l - l \cos \theta$. Segue que a energia potencial gravitacional é

$$V = mgl(1 - \cos \theta). \quad (0,1 \text{ pontos})$$

Finalmente, a Lagrangiana do sistema é

$$L = T - V = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl(1 - \cos \theta). \quad (0,1 \text{ pontos}) \quad (6)$$

- (b) **(0,2 pontos)** A equação de movimento é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

Utilizando a Eq. (6) na equação acima, temos

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta.$$

- (c) **(0,3 pontos)** Nos pontos de equilíbrio, $dV/d\theta = 0$, o que nos dá $\sin \theta = 0$, ou seja, os pontos procurados são

$$\theta = 0 \text{ e } \theta = \pi. \quad (0,1 \text{ pontos})$$

Para avaliar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, analisamos o sinal de

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mgl \cos \theta. \quad (0,1 \text{ pontos})$$

Para $\theta = 0$, a expressão acima tem valor positivo (mínimo de V), caracterizando um equilíbrio **estável**, enquanto que para $\theta = \pi$, o sinal é negativo (máximo de V), correspondendo a um ponto de equilíbrio **instável**. **(0,1 pontos)**

- (d) **(0,2 pontos)** Para pequenas oscilações em torno de $\theta = 0$, podemos aproximar $\sin \theta \approx \theta$. A equação de movimento fica

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta,$$

cuja solução geral é, por inspeção,

$$\theta(t) = A \sin(\omega t + \delta),$$

onde A e δ são constantes arbitrárias determinadas pelas condições iniciais e

$$\omega = \sqrt{g/l},$$

que é a frequência (angular) procurada. Alternativamente, pode-se comparar a Eq. (2) com a equação de movimento de um oscilador harmônico simples uni-dimensional de frequência (angular) ω ,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

e inferir que no caso em questão teremos $\omega = \sqrt{g/l}$.

Escolhas alternativas da coordenada generalizada, igualmente válidas, como, por exemplo, o ângulo que a haste faz com a horizontal, também foram aceitas como corretas. Além disso, formas da energia potencial gravitacional que diferem da usada acima por uma constante (equivalentes a escolhas alternativas da altura de referência) também foram aceitas como corretas.

Q3. a) **(0,1 pontos)** A conservação de energia nos dá

$$E_0 + mc^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} + E, \quad (7)$$

enquanto a conservação de momento linear é

$$\vec{p}_0 + \vec{0} = \vec{p} + \vec{p}_e.$$

b) **(0,4 pontos)** Da conservação de momento linear

$$p_e^2 = (\vec{p}_0 - \vec{p})^2 = p_0^2 + p^2 - 2pp_0 \cos \theta.$$

Usando que, para os fótons, $p_0 = E_0/c$ e $p = E/c$ e levando na Eq. (7)

$$E_0 + mc^2 = \sqrt{E_0^2 + E^2 - 2EE_0 \cos \theta + m^2 c^4} + E.$$

Isolando a raiz quadrada e elevando a equação ao quadrado

$$\begin{aligned} (E_0 - E + mc^2)^2 &= E_0^2 + E^2 - 2EE_0 \cos \theta + m^2 c^4 \\ E_0^2 + E^2 + m^2 c^4 - 2EE_0 + 2mc^2(E_0 - E) &= E_0^2 + E^2 - 2EE_0 \cos \theta + m^2 c^4 \\ -EE_0 + mc^2(E_0 - E) &= -EE_0 \cos \theta \\ mc^2(E_0 - E) &= EE_0(1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{1}{mc^2} (1 - \cos \theta)}. \quad (8)$$

Uma resposta alternativa, que também foi aceita como correta, partia da expressão dada no formulário

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta),$$

e usava a relação entre as energias e os comprimentos de onda dos fótons

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{e} \quad E_0 = \frac{hc}{\lambda_0},$$

para obter a expressão da Eq. (8)

Raciocínio correto com erros de álgebra levaram à [perda de \(0,2 pontos\)](#).

c) **(0,2 pontos)** Da relação entre a energia e o comprimento de onda dos fótons

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{e} \quad E_0 = \frac{hc}{\lambda_0},$$

onde λ é o comprimento de onda do fóton espalhado. Portanto,

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta).$$

Para $\theta = \pi/2$,

$$\boxed{\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}}.$$

Raciocínio correto com erros de álgebra levaram à perda de (0,1 pontos).

c) **(0,3 pontos)** A energia cinética do elétron espalhado é

$$K = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 = E_0 - E.$$

Fazendo $\theta = \pi/2$ na Eq. (8)

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{1}{mc^2},$$

donde

$$E = \frac{mc^2 E_0}{E_0 + mc^2}.$$

Assim,

$$K = E_0 \left(1 - \frac{mc^2}{E_0 + mc^2} \right) = \frac{hc}{\lambda_0} \left(1 - \frac{mc^2}{\frac{hc}{\lambda_0} + mc^2} \right).$$

Finalmente,

$$K = \frac{hc}{\lambda_0} \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_C}}.$$

Resposta em termos das energias dos fótons e não em termos dos comprimentos de onda levaram à perda de (0,1 pontos).

Raciocínio correto com erros de álgebra levaram à perda de (0,2 pontos).

Q4. (a) **(0,3 pontos)** Queremos calcular $\langle n' | \hat{x} | n \rangle$ e $\langle n' | \hat{p} | n \rangle$. Utilizando que

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p}, \quad (0,1 \text{ pontos})$$

obtemos

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \\ \hat{p} &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \end{aligned}$$

Os elementos de matriz pedidos são

$$\begin{aligned} \langle n' | \hat{x} | n \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle n' | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) | n \rangle, \\ \langle n' | \hat{p} | n \rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \langle n' | (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) | n \rangle. \quad (0,1 \text{ pontos}) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \langle n' | \hat{a} | n \rangle &= \langle n' | \sqrt{n} | n-1 \rangle = \sqrt{n} \delta_{n',n-1}, \\ \langle n' | \hat{a}^\dagger | n \rangle &= \langle n' | \sqrt{n+1} | n+1 \rangle = \sqrt{n+1} \delta_{n',n+1}, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \langle n' | \hat{x} | n \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\sqrt{n} \delta_{n',n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{n',n+1}), \\ \langle n' | \hat{p} | n \rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\sqrt{n+1} \delta_{n',n+1} - \sqrt{n} \delta_{n',n-1}). \end{aligned} \quad (0,1 \text{ pontos})$$

(b) **(0,2 pontos)** Primeiramente, escrevemos \hat{x}^2 em termos de \hat{a} e \hat{a}^\dagger

$$\hat{x}^2 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \frac{\hbar}{2m\omega} [\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2]. \quad (0,1 \text{ pontos})$$

O valor esperado procurado é

$$\langle n | \hat{x}^2 | n \rangle = \langle n | \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2) | n \rangle.$$

Calculamos cada termo separadamente

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{a}^2 | n \rangle &= \langle n | a\sqrt{n} | n-1 \rangle = \sqrt{n}\sqrt{n-1} \delta_{n,n-2} = 0, \\ \langle n | (\hat{a}^\dagger)^2 | n \rangle &= \langle n | a^\dagger\sqrt{n+1} | n+1 \rangle = \sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \delta_{n,n+2} = 0, \\ \langle n | \hat{a}\hat{a}^\dagger | n \rangle &= \langle n | a\sqrt{n+1} | n+1 \rangle = (n+1) \langle n | n \rangle = n+1, \\ \langle n | \hat{a}^\dagger\hat{a} | n \rangle &= \langle n | a^\dagger\sqrt{n} | n-1 \rangle = n \langle n | n \rangle = n. \end{aligned}$$

Juntando todas as contribuições

$$\langle n | \hat{x}^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1) = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (0,1 \text{ pontos})$$

(c) **(0,2 pontos)** A energia total média em um auto estado do Hamiltoniano é

$$\langle n | \hat{H} | n \rangle = \hbar\omega \langle n | \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) | n \rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

onde usamos o valor esperado do operador número calculado no item anterior. A energia potencial média em um auto estado do Hamiltoniano é

$$\langle n | \hat{V} | n \rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \langle n | \hat{x}^2 | n \rangle. \quad (0,1 \text{ pontos})$$

Do item anterior

$$\langle n | \hat{V} | n \rangle = \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{\hbar\omega}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Finalmente

$$\boxed{\frac{\langle n | \hat{H} | n \rangle}{\langle n | \hat{V} | n \rangle} = 2.} \quad (0,1 \text{ pontos})$$

(d) **(0,3 pontos)** Primeiro notamos que

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_H(t)}{dt} = [\hat{a}_H(t), \hat{H}] = e^{i\hat{H}t/\hbar} [\hat{a}, \hat{H}] e^{-i\hat{H}t/\hbar}, \quad (0,1 \text{ pontos})$$

já que o Hamiltoniano comuta com as exponenciais. O comutador procurado é

$$[\hat{a}, \hat{H}] = \hbar\omega \left[\hat{a}, \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \right] = \hbar\omega [\hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}],$$

onde usamos que um número comuta com qualquer operador. Mas

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = (\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a}^2) = (\hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a} = [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \hat{a} = \hat{a}, \quad (0,1 \text{ pontos})$$

já que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Assim,

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_H(t)}{dt} = \hbar\omega e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{a} e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \hbar\omega \hat{a}_H(t).$$

Resolvendo essa equação diferencial

$$\boxed{\hat{a}_H(t) = \hat{a}(0) e^{-i\omega t} = \hat{a} e^{-i\omega t}.} \quad (0,1 \text{ pontos})$$

A seguinte resposta alternativa também foi aceita. Usando

$$e^X A e^{-X} = A + [X, A] + \frac{1}{2!} [X, [X, A]] + \dots,$$

obtem-se

$$a_H(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{a} e^{-i\hat{H}t/\hbar} = a + \left[\frac{i\hat{H}t}{\hbar}, a \right] + \frac{1}{2!} \left[\frac{i\hat{H}t}{\hbar}, \left[\frac{i\hat{H}t}{\hbar}, a \right] \right] + \dots.$$

De

$$\left[\frac{i\hat{H}t}{\hbar}, \hat{a} \right] = -i\omega t \hat{a}, \quad (0,1 \text{ pontos})$$

segue que

$$a_H = \hat{a} - i\omega t \hat{a} + (-i\omega t)^2 \hat{a} + \dots = \hat{a} e^{-i\omega t}. \quad (0,1 \text{ pontos}) \quad (9)$$

Portanto, o comutador é

$$[\hat{a}_H, \hat{H}] = e^{-i\omega t} [\hat{a}, H] = \hbar\omega e^{-i\omega t} \hat{a}, \quad (10)$$

e (9) e (10) satisfazem a equação de movimento dada no enunciado. **(0,1 pontos)**

Q5. a) **(0,2 pontos)** O gráfico pedido é mostrado na Fig. 5:

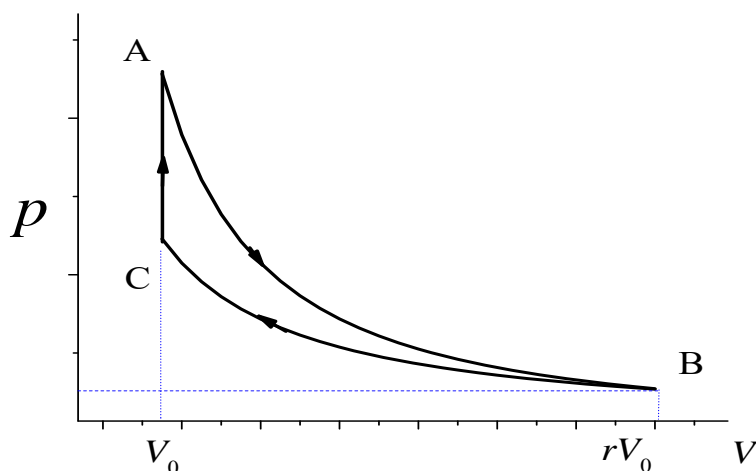


Figura 1: Gráfico esquemático mostrando o ciclo num diagrama $p \times V$.

Gráficos em que o candidato errou o sentido do ciclo ou mesmo desenhou curvas de forma errada, como por exemplo uma adiabática como uma linha reta no diagrama $p \times V$, mas que mostravam pelo menos uma noção grosseira do ciclo termodinâmico pedido, obtiveram **(0,1 pontos)**.

b) **(0,3 pontos)** (i) De maneira geral, o trabalho realizado pelo gás num processo reversível quando o volume varia de V_1 até V_2 é dado por

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Portanto, o trabalho realizado no trecho CA é nulo, pois não há variação de volume. O trecho AB é adiabático, portanto não há troca de calor Q_{AB} entre o gás e a vizinhança. Da primeira lei da termodinâmica $\Delta U = Q - W$ (U é a energia interna),

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = n c_V (T_A - T_B),$$

onde usamos a expressão para a energia interna de um gás ideal. Finalmente, na isoterma BC, usando a equação de estado do gás ideal,

$$W_{BC} = \int_{rV_0}^{V_0} p dV = -nRT_B \ln r.$$

Como $T_C = T_B$ e as isotermas são hipérbolas $p = nRT/V$ num gráfico $p \times V$, segue que $T_{\min} = T_B < T_A = T_{\max}$. Logo, usando $c_V = R/(\gamma - 1)$, o trabalho total é dado por

$$W_{\text{total}} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_{\max} - T_{\min}) - nRT_{\min} \ln r. \quad (0,2 \text{ pontos})$$

Uma resposta alternativa, que também foi aceita como correta, calculou o trabalho no trecho AB da seguinte forma. Usando $pV^\gamma = \text{cte.}$, o trabalho no trecho AB fica

$$W_{AB} = \text{cte.} \int_{V_0}^{rV_0} \frac{dV}{V^\gamma} = \text{cte.} \frac{V_0^{1-\gamma} (r^{1-\gamma} - 1)}{1 - \gamma},$$

onde $p_A V_A^\gamma = p_A V_0^\gamma$. Portanto,

$$W_{AB} = p_A V_0 \frac{(r^{1-\gamma} - 1)}{1 - \gamma} = nRT_{\max} \frac{(r^{1-\gamma} - 1)}{1 - \gamma}.$$

Com esse resultado, pode-se escrever o trabalho total de uma forma alternativa

$$W_{\text{total}} = W_{AB} + W_{BC} = nRT_{\max} \frac{(r^{1-\gamma} - 1)}{1 - \gamma} - nRT_{\min} \ln r.$$

(ii) Só há troca de calor entre o gás e a vizinhança nos trechos BC e CA, pois o processo AB é adiabático. Como BC é uma isoterma, a energia interna do gás se mantém constante e, usando a primeira lei,

$$Q_{BC} = W_{BC} = -nRT_B \ln r < 0,$$

o que corresponde a uma liberação de calor do gás para sua vizinhança. Na isocórica CA, o trabalho é nulo e, usando novamente a primeira lei,

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} = nC_V(T_A - T_C) = nC_V(T_{\max} - T_{\min}).$$

Portanto, o calor injetado no gás é

$$Q_{\text{injetado}} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_{\max} - T_{\min}). \quad (0,1 \text{ pontos})$$

Respostas corretas, mas que não ficaram expressas em termos de T_{\max} , T_{\min} e γ como pedido, levaram a uma **perda de (0,1 pontos)**.

c) **(0,1 pontos)** O rendimento é dado por

$$\eta = \frac{W_{\text{total}}}{Q_{\text{injetado}}} = 1 - \frac{(\gamma - 1)T_{\min}}{(T_{\max} - T_{\min})} \ln r.$$

Nesse item, o candidato que forneceu o rendimento correto, porém em função de outros parâmetros que não aqueles pedidos no item (b), também obteve a pontuação total.

d) **(0,4 pontos)** Na adiabática AB temos que

$$p_A V_0^\gamma = p_B (rV_0)^\gamma \Rightarrow p_B = p_A / r^\gamma,$$

e na isoterma BC temos que

$$p_B r V_0 = p_C V_0 \Rightarrow p_C = r p_B,$$

donde

$$r = \frac{p_C}{p_B} = \frac{p_C}{p_A} r^\gamma \Rightarrow r^{\gamma-1} = \frac{p_A}{p_C}.$$

Da equação de estado dos gases ideais para a isovolumétrica CA

$$\frac{p_A}{p_C} = \frac{T_A}{T_C} = \frac{T_{\max}}{T_{\min}}.$$

Assim,

$$r = \left(\frac{T_{\max}}{T_{\min}} \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Levando na expressão para o rendimento,

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_{\min}}{(T_{\max} - T_{\min})} \ln \left(\frac{T_{\max}}{T_{\min}} \right)}. \quad (0,2 \text{ pontos})$$

Se $T_{\max} = 2T_{\min}$, temos que

$$\eta = 1 - \ln 2 \approx 0.31,$$

e o rendimento da máquina de Carnot correspondente é

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 0.5,$$

de forma que

$$\boxed{\frac{\eta}{\eta_{\text{Carnot}}} = 2(1 - \ln 2)}. \quad (0,1 \text{ pontos})$$

O rendimento da máquina é menor do que o da máquina de Carnot correspondente. Isso é o esperado porque uma das consequências da segunda lei da termodinâmica é que nenhuma máquina operando entre dois reservatórios a temperaturas T_{\max} e T_{\min} pode ter rendimento maior que a máquina de Carnot entre esses reservatórios. (0,1 pontos)