EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2016

Critérios de correção

Parte 2

- **Como entender os critérios de correção.**

1. O valor total de cada questão é 1 ponto.
2. As questões são divididas em itens denotados por letras (a, b, c, ...). O valor de cada item é mostrado em vermelho **no início do item**.
3. O valor dos passos intermediários necessários para a resolução de cada item é mostrado em azul **imediatamente após o passo**. Para que cada passo intermediário seja considerado correto, é preciso que o raciocínio que leva ao resultado parcial esteja completo e correto.
4. Respostas "secas", sem justificativas não foram aceitas.

Q6. a) **(0,6 pontos)** Pela lei de Gauss, de maneira geral, sabemos que:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_V}{\epsilon_0}, \tag{11}$$

onde a integral é feita sobre a superfície S de uma região V e q_V é a carga total contida em V. Tomaremos, nessa questão, regiões esféricas de raio r centradas no centro da esfera isolante. Por simetria, o campo elétrico apontará sempre na direção radial, ou seja, $\vec{E} = E\hat{r}$.

i) Campo elétrico para $r < a$: Neste sub-item, escolhemos regiões esféricas de raio $r < a$, representadas pelas linhas pontilhadas na Fig. 2. Desta forma, a carga em V é

$$\begin{aligned} q_V &= \rho V \,, \\ q_V &= \frac{4\pi\rho}{3} r^3 \,. \end{aligned}$$

Aplicando a Eq. (11) e usando que o campo elétrico é radial

$$E 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho}{3\epsilon_0} r^3.$$

Portanto, a magnitude do campo elétrico será dada por

$$\boxed{E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r.} \quad \text{(0,2 pontos)}$$

Também foi aceito como resposta correta o campo em termos de Q ao invés de ρ

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}.$$

Notas parciais foram atribuídas neste sub-item (a)(i) também nos seguintes casos:

- Respostas finais que omitiram a permissividade do vácuo ϵ_0. (0,1 pontos)
- Respostas que escreveram a área da superfície da esfera erroneamente. (0,1 pontos)

ii) Campo elétrico para $a < r < b$: Neste caso, as regiões esféricas tem raio r tal que $a < r < b$, como mostrado na Fig. 3. A carga total contida em V é $q_V = Q$. Aplicando a Eq. (11) e usando que o campo elétrico é radial

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Portanto, a magnitude do campo elétrico será

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.} \quad \text{(0,1 pontos)}$$

iii) Campo elétrico para $b < r < c$: Nesta região, queremos o campo elétrico dentro de um condutor em equilíbrio eletrostático (veja a Fig. 4), que sempre se anula. Portanto,

$$\boxed{E = 0.} \quad \text{(0,2 pontos)}$$

(iv) Campo elétrico para $r > c$: Agora, as regiões esféricas tem raio $r > c$, como mostrado na Fig. 5. A carga contida em V é $q_V = Q$. Aplicando novamente a Eq. (11) e usando que o campo elétrico é radial

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Portanto, a magnitude do campo elétrico será

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.} \quad \text{(0,1 pontos)}$$

Também foi aceito como resposta correta o campo em termos de ρ ao invés de Q

$$E = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2}.$$

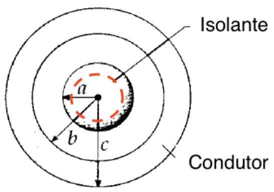

Figura 2: Região V no caso (i) $r < a$.

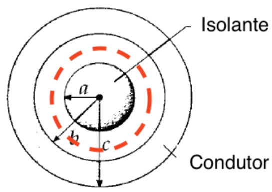

Figura 3: Região V no caso (ii) $a < r < b$.

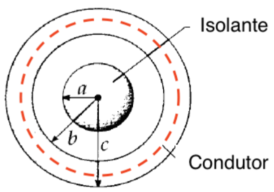

Figura 4: Região V no caso (iii) $b < r < c$.

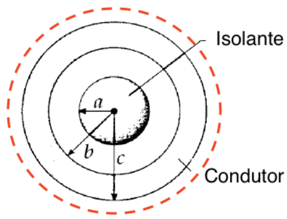

Figura 5: Região V no caso (iv) $r > c$.

b) **(0,2 pontos)** Em todo condutor em equilíbrio eletrostático, a carga líquida se distribui na sua superfície. Vamos denotar por q_1 a carga induzida na superfície interna do condutor ($r = b$) e q_2 a a carga induzida na superfície externa do condutor ($r = c$). Como dentro do condutor temos $E = 0$, aplicando a Eq. (11) a uma região como as do item (a)(iii) (raio r, tal que $b < r < c$), a carga total em V nesse caso é nula. Portanto,

$$\begin{aligned} q_V &= Q + q_1 = 0 \\ \Rightarrow q_1 &= -Q. \end{aligned}$$

Como, por simetria, a carga se distribui de maneira uniforme na superfície, segue que a densidade de carga induzida em $r = b$ é

$$\boxed{\sigma_1 = -\frac{Q}{4\pi b^2}.}$$

Como o condutor está descarregado, por conservação de carga, temos que

$$\begin{aligned} Q_{condutor} = 0 &= q_1 + q_2 \\ q_2 &= -q_1 \end{aligned}$$

Usando novamente que, por simetria, a carga se distribui de maneira uniforme na superfície, a densidade de carga induzida em $r = c$ é

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi c^2}.}$$

Também foram aceitas como respostas corretas as densidades de carga em termos de ρ

$$\sigma_1 = -\frac{\rho a^3}{3b^2}\,,$$

$$\sigma_2 = \frac{\rho a^3}{3c^2}\,.$$

Respostas para esse item em que apenas a carga induzida foi calculada, e não a densidade de carga por unidade de área, receberam a pontuação parcial de (0,1 pontos).

c) **(0,2 pontos)** Esboço do gráfico $E \times r$:

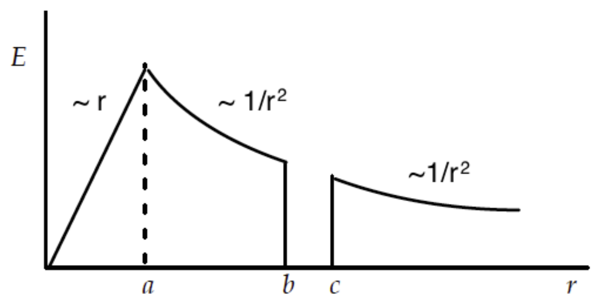

Figura 6: Esboço do gráfico $E \times r$.

Respostas com esboços corretos para algumas regiões e incorretos para outras obtiveram a pontuação parcial de (0,1 pontos).

Q7. a) **(0,4 pontos)** Pelo formulário podemos ver que no vácuo (onde $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$), as equações de Maxwell são dadas por

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0\,; && (12)\\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\,; && (13)\\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,; && (14)\\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,; && (15) \end{aligned}$$

Tomando o rotacional da Eq. (14) temos que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0\,. \tag{16}$$

Utilizando a primeira identidade vetorial dada no enunciado juntamente com a Eq. (12), podemos re-escrever o primeiro termo do lado esquerdo da equação acima como

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}\,. \quad \text{(0,1 pontos)}$$

Desta forma a Eq. (16) pode ser re-escrita, trocando a ordem das derivadas parciais, como

$$-\nabla^2 \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \vec{B} \right) = 0\,. \quad \text{(0,1 pontos)}$$

Utilizando a Eq. (15) obtemos a equação da onda para o campo elétrico

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.}$$

Tomando agora o rotacional da Eq. (15) temos que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0\,.$$

Utilizando a primeira identidade vetorial dada no enunciado juntamente com a Eq. (13) e trocando a ordem das derivadas parciais, podemos re-escrever a equação acima como

$$-\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \vec{E} \right) = 0\,. \quad \text{(0,1 pontos)} \tag{17}$$

Finalmente, utilizando a Eq. (14) no segundo termo da Eq. (17) obtemos

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.} \quad \text{(0,1 pontos)}$$

b) **(0,1 pontos)** A equação de onda para uma função $f(\vec{r},t)$ se propagando com velocidade v é dada por

$$\boxed{\nabla^2 f(\vec{r},t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r},t)}{\partial t^2}.} \tag{18}$$

Comparando com as Eqs. (17) e (18), notamos que a velocidade de propagação de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é dada por

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0\epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c.} \tag{19}$$

c) **(0,2 pontos)** Supondo que $\vec{E}$ aponte na direção $\hat{x}$ e se propague na direção $\hat{z}$, podemos escrever que

$$\vec{E} = E_0\, e^{i(kz-wt)}\hat{x}\,, \tag{20}$$
$$\vec{B} = B_0\, e^{i(kz-wt)}\hat{y}\,. \tag{21}$$

O campos "físicos" podem ser escritos como (supondo E_0 e B_0 reais)

$$\vec{E}_f = Re(\vec{E}) = E_0\, \cos(kz-wt)\hat{x}\,, \tag{22}$$
$$\vec{B}_f = Re(\vec{B}) = B_0\, \cos(kz-wt)\hat{y}\,. \tag{23}$$

Essas soluções, de fato, satisfazem as quatro Eqs. (12-15) desde que $\omega = ck$, como pode ser verificado. De maneira geral, a direção de $\vec{E}$ é arbitrária, desde que seja perpendicular a $\vec{z}$. Uma vez fixada a direção de $\vec{E}$, $\vec{B}$ tem que ser perpendicular a $\vec{E}$ e $\vec{z}$. Os *módulos* de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são:

$$E = E_0\, \cos(kz-wt)\,,$$
$$B = B_0\, \cos(kz-wt)\,.$$

Tanto as respostas das Eqs. (20-21) quanto das Eqs. (22-23), ou formas equivalentes compatíveis com as condições acima, foram consideradas corretas e receberam a pontuação total do item.

Notas parciais foram atribuídas também nos seguintes casos:

- Campos propagando nas direções x ou y, com o restante correto. (0,1 pontos)
- Campos vetoriais $\vec{E}$ e $\vec{B}$ fora de fase, mas o restante correto. (0,1 pontos)
- Campos na forma das Eqs. (20-21), sem o "i" nas exponenciais, mas o restante correto.(0,1 pontos)

Vetores campo elétrico e magnético na mesma direção da propagação da onda não obtiveram nenhuma pontuação.

d) **(0,3 pontos)** Tomando a divergência da Eq. (15) temos

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) = \mu_0\nabla\cdot\vec{J}\,. \quad \text{(0,1 pontos)} \tag{24}$$

O primeiro termo se anula pela segunda identidade dada no enunciado. Usando a Eq. (12)

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0} \quad \text{(0,1 pontos)}$$

Esta equação expressa a *lei de conservação da carga*: em sua forma integral, ela implica que a taxa de variação temporal da carga total incluída em uma região espacial fixa é igual ao fluxo de corrente elétrica entrando pela superfície que delimita a região. Foi aceita a resposta que apenas declarou: "lei de conservação da carga".

Q8. (a) **(0,2 pontos)** Das relações fornecidas

$$\hat{H}\left|\pm\right\rangle = -\gamma B\hat{S}_z\left|\pm\right\rangle = \mp\frac{\gamma B\hbar}{2}\left|\pm\right\rangle$$

Portanto, $\left|\pm\right\rangle$ são auto-vetores do Hamiltoniano com auto-valores dados, respectivamente, por

$$\boxed{E_\pm = \mp\frac{\gamma\hbar B}{2}.}$$

(b) **(0,2 pontos)** De maneira geral,

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \left[c_+e^{-i(E_+/\hbar)t}\left|+\right\rangle + c_-e^{-i(E_-/\hbar)t}\left|-\right\rangle\right], \quad \text{(0,1 pontos)}$$

onde $c_\pm$ são coeficientes determinados pelas condições iniciais. Usando as expressões dos auto-valores do item anterior

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \left[c_+e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle + c_-e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle\right].$$

Em $t = 0$ temos

$$\left|\psi(t=0)\right\rangle = \left[c_+\left|+\right\rangle + c_-\left|-\right\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|+\right\rangle - \left|-\right\rangle\right],$$

donde $c_+ = -c_- = 1/\sqrt{2}$. Portanto,

$$\boxed{\left|\psi(t)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle\right].} \quad \text{(0,1 pontos)}$$

(c) **(0,4 pontos)** A média de $\hat{S}_i$ é dada por

$$\left\langle\hat{S}_i\right\rangle = \left\langle\psi(t)\right|\hat{S}_i\left|\psi(t)\right\rangle \quad \text{(0,1 pontos)}$$

Utilizando a $\left|\psi(t)\right\rangle$ obtida no item anterior

$$\begin{aligned}
\hat{S}_x\left|\psi(t)\right\rangle &= \hat{S}_x\frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle\right] \\
&= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle\right], \\
\hat{S}_y\left|\psi(t)\right\rangle &= \hat{S}_y\frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle\right] \\
&= i\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle + e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle\right], \\
\hat{S}_z\left|\psi(t)\right\rangle &= \hat{S}_z\frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle\right] \\
&= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\left|+\right\rangle + e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\left|-\right\rangle\right]. \quad \text{(0,2 pontos)}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\langle\psi(t)|\hat{S}_x|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\langle+|-e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\langle-|\right]\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}|-\rangle-e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}|+\rangle\right] \\
&= -\frac{\hbar}{2}\cos(\gamma Bt) \\
\langle\psi(t)|\hat{S}_y|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\langle+|-e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\langle-|\right]i\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}|-\rangle+e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}|+\rangle\right] \\
&= \frac{\hbar}{2}\sin(\gamma Bt) \\
\langle\psi(t)|\hat{S}_z|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\langle+|-e^{i\frac{\gamma B}{2}t}\langle-|\right]\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t}|+\rangle+e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}|-\rangle\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\left\langle\hat{S}_x\right\rangle &= -\tfrac{\hbar}{2}\cos(\gamma Bt) \\
\left\langle\hat{S}_y\right\rangle &= \tfrac{\hbar}{2}\sin(\gamma Bt) \\
\left\langle\hat{S}_z\right\rangle &= 0
\end{aligned}} \quad \text{(0,1 pontos)}$$

Notar que nesse item, a resposta final foi considerada correta mesmo quando dada em termos das exponenciais.

(d) **(0,2 pontos)** Queremos t tal que

$$\begin{aligned}
|\psi(0)\rangle &= |\psi(t)\rangle, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle-|-\rangle\right] &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{+i\frac{\gamma B}{2}t}|+\rangle-e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}|-\rangle\right], \quad \text{(0,1 pontos)}
\end{aligned}$$

onde usamos o resultado do item (b). Por inspeção nota-se que a condição a ser satisfeita é

$$e^{\pm i\frac{\gamma B}{2}t} = 1 \Rightarrow \frac{\gamma B}{2}t = 2n\pi \quad (n = 1,2,\ldots).$$

O menor valor de t corresponde a $n = 1$

$$\boxed{t = \frac{4\pi}{\gamma B}.} \quad \text{(0,1 pontos)}$$

Notar também que, mesmo que a função de onda obtida no item (b) estivesse incorreta, o aluno poderia ainda assim obter pontuação não nula nos itens (c) e (d), desde que os passos correspondentes estivessem corretos.

Q9. a) **(0,1 pontos)** Em qualquer outro referencial S', o intervalo invariante terá o mesmo valor

$$\Delta s^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2 (\Delta t')^2 .$$

Se nesse referencial os eventos ocorressem no mesmo ponto do espaço, $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$ e teríamos $\Delta s^2 = -c^2 (\Delta t')^2 < 0$, o que contradiz o enunciado. Portanto, esse referencial não existe.

b) **(0,1 pontos)** Como o intervalo invariante é positivo

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 > c^2 \Delta t^2.$$

Supondo a propagação de um sinal com velocidade $\vec{V}$ entre os eventos, teríamos $\Delta x = V_x \Delta t$, $\Delta y = V_y \Delta t$ e $\Delta z = V_z \Delta t$. Levando na desigualdade acima

$$\left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right) \Delta t^2 > c^2 \Delta t^2.$$

Assim, teríamos $V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V^2 > c^2$. Portanto, o sinal teria que se propagar com uma velocidade maior do que a da luz, o que é impossível.

Soluções alternativas para o item (b) que também foram aceitas:

- Nas condições do item (a), existe um referencial S' no qual $\Delta t' = 0$ e $(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 = \Delta s^2 > 0$. Ora, mas isso implicaria numa propagação do sinal com velocidade infinita, o que é impossível.
- O evento (2) está fora do cone de luz do evento (1) e, portanto, não pode guardar relação causal com ele.
- Não é possível porque o evento (2) está fora do cone de luz do evento (1).

c) **(0,4 pontos)** (i) Como o relógio está em repouso em S', $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$ e $\Delta s^2 = -c^2 (\Delta t')^2 < 0$. O sinal é negativo. (0,1 pontos)

(ii) Observados no referencial S, os eventos são tais que $\Delta x = V_x \Delta t$, $\Delta y = V_y \Delta t$ e $\Delta z = V_z \Delta t$. Logo,

$$\Delta s^2 = \left(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2\right) \Delta t^2 - c^2 \Delta t^2 = -c^2 (\Delta t')^2 ,$$

onde usamos que o valor do intervalo invariante não depende do referencial. Segue que

$$\boxed{\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Delta t.} \quad \text{(0,3 pontos)}$$

Neste sub-item (c)(ii), se o candidato apenas escreveu que

$$(\Delta t')^2 = (\Delta t)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right) ,$$

sem relacionar os deslocamentos espaciais com Δt, ele recebeu a nota parcial (0,2 pontos). Além disso, se o candidato deu diretamente a fórmula final (ou mesmo apenas $\Delta t = \gamma \Delta t'$), argumentando que se trata da expressão para a dilatação temporal da relatividade restrita, ele obteve os (0,3 pontos).

d) **(0,4 pontos)** (i) No referencial de laboratório S, a separação espacial entre os eventos é a distância entre F e D e a separação temporal é o tempo que a partícula leva para viajar entre um e outro

$$\boxed{\Delta x = L \quad \text{e} \quad \Delta t = \frac{L}{V}.} \quad \text{(0,1 pontos)}$$

(ii) No referencial da partícula, os eventos ocorrem no mesmo ponto espacial e a separação temporal entre eles pode ser obtida usando o resultado do item (c)(ii)

$$\boxed{\Delta x' = 0 \quad \text{e} \quad \Delta t' = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(\frac{L}{V}\right).} \quad (0{,}1 \text{ pontos})$$

Neste sub-item (d)(ii), a resposta

$$\Delta x' = 0 \quad \text{e} \quad \Delta t' = \left(\frac{L'}{V}\right),$$

também foi considerada correta.

(iii) Do ponto de vista de S', $L' = V\Delta t'$, pois F e D (e o refencial S) se movem com velocidade $-\vec{V}$. Usando a expressão para $\Delta t'$ obtida no item anterior

$$\boxed{L' = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}L.} \quad (0{,}2 \text{ pontos})$$

Neste sub-item (d)(iii), se o candidato deu diretamente a fórmula final, argumentando que se trata da expressão para a contração espacial de Lorentz(-Fitzgerald) da relatividade restrita, ele obteve os (0,2 pontos).

Q10. a) **(0,3 pontos)** A função de partição é obtida somando sobre todos os estados do sistema com o peso de Boltzmann (0,1 pontos)

$$Z = \mathrm{Tr} e^{-\beta H} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdp}{h} \exp\left[-\beta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\right], \quad (0{,}1 \text{ pontos})$$

onde $\beta^{-1} = k_B T$. Usando

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

obtemos

$$Z = \frac{\pi}{h}\sqrt{\frac{2m}{\beta}}\sqrt{\frac{2}{\beta m\omega^2}}$$

$$\boxed{Z = \frac{2\pi k_B T}{h\omega} = \frac{k_B T}{\hbar\omega}.} \quad (0{,}1 \text{ pontos})$$

O item também foi considerado correto se o aluno obteve a função de partição Z_{3N} dos $3N$ osciladores

$$Z_{3N} = (Z)^{3N} = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^{3N}.$$

b) **(0,3 pontos)** Como os osciladores são independentes, o número médio $n(x)dx$ pedido é igual a $3N$ vezes a probabilidade de um oscilador ter sua posição no intervalo considerado. Esta probabilidade, por sua vez, é igual ao peso de Boltzmann integrado sobre todos os valores de momento linear (0,1 pontos), donde

$$n(x)dx = \frac{3Ndx}{Z}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{h} \exp\left[-\beta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\right] \quad (0{,}1 \text{ pontos})$$

$$\boxed{n(x)dx = 3N\omega dx\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T}\right).} \quad (0{,}1 \text{ pontos})$$

c) **(0,2 pontos)** A energia potencial média por oscilador é

$$\begin{aligned}
\langle U \rangle &= \frac{1}{3N}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m\omega^2 x^2}{2}\right) n(x)dx \\
&= \omega\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T}\right) dx \quad (0{,}1 \text{ pontos}) \\
&= \omega\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}(k_B T)\sqrt{\frac{2k_B T}{m\omega^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Usando que $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} = \sqrt{\pi}/2$,

$$\boxed{\langle U \rangle = \frac{k_B T}{2}.} \quad (0{,}1 \text{ pontos})$$

Esse resultado é o esperado pelo teorema da equipartição, que diz que o valor médio clássico de cada grau de liberdade quadrático da Hamiltoniana (como a energia potencial) é $k_B T/2$.

O item também foi considerado correto se o aluno calculou primeiro a energia total média de um oscilador através de

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = k_B T,$$

e usou o teorema da equipartição para obter a contribuição da energia potencial.

d) **(0,2 pontos)** Temos que

$$\frac{m\omega^2 x_0^2}{2} = \frac{k_B T}{2} \quad \text{(0,1 pontos)} \Rightarrow f = \frac{x_0}{d} = \frac{1}{\omega d}\sqrt{\frac{k_B T}{m}}.$$

Para os dados fornecidos

$$\boxed{f \approx 0.03 = 3\%.} \quad \text{(0,1 pontos)}$$