EUF

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o segundo semestre de 2016

Respostas esperadas

Parte 1

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**
  Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q1. (a) Sim, pois a única força capaz de gerar o torque para que a esfera role sem deslizar é o atrito.

(b) Sim, pois o atrito é estático e não realiza trabalho, uma vez que a velocidade do ponto de contato entre a esfera e o plano inclinado é nula (rolamento sem deslizamento).

(c) Tomando a base do plano como o zero de energia potencial gravitacional, a energia mecânica inicial é apenas potencial gravitacional, dada por $E_i = mgh$. Na base do plano inclinado, a energia mecânica é puramente cinética, dada pela energia cinética de translação do centro de massa (CM) mais a energia de rotação em torno do CM, ou seja, $E_f = mv^2/2 + I\omega^2/2$, onde v e ω são, respectivamente, as velocidades de translação do CM e angular na base do plano. Por conservação de energia mecânica,

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{1}$$

Como há rolamento sem deslizamento, a velocidade de translação do CM e a velocidade de rotação satisfazem $v = \omega r$. Substituindo na Eq. (1) e usando a expressão para o momento de inércia dada no enunciado obtemos

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.}$$

(d) Definimos um sistema de coordenadas com um eixo x paralelo ao plano inclinado e apontando para a base do plano e um eixo y perpendicular ao plano e apontando para cima do plano. A força resultante no eixo y é nula. No eixo x, usando a segunda lei de Newton,

$$mg\sin\theta - f_{at} = ma, \tag{2}$$

onde f_{at} é a força de atrito e a a aceleração do CM. Para o movimento de rotação

$$\tau = f_{at}r = I\alpha, \tag{3}$$

onde τ é o torque em relação a um eixo que passa pelo CM da esfera e α é sua aceleração angular. Derivando em relação ao tempo a expressão do item anterior, $v = \omega r$, obtemos $a = \alpha r$. Levando esta última relação e a Eq. (2) na Eq. (3) obtemos

$$(mg\sin\theta - ma)r = \frac{2}{5}mr^2\frac{a}{r},$$

donde

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta. \tag{4}$$

Dado que a é constante, podemos usar a seguinte relação, válida para um movimento uniformemente acelerado,

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta x \\ &= 2ah/\sin\theta, \end{aligned} \tag{5}$$

onde $v_0 = 0$ é a velocidade no instante inicial e $\Delta x = h/\sin\theta$ o deslocamento no eixo x. Levando a Eq. (4) na Eq. (5)

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7}gh},}$$

que coincide com o resultado já encontrado no item (c).

Q2. (a) Utilizaremos como coordenada generalizada o ângulo θ que a haste faz com a vertical. O módulo da velocidade da partícula é dado por $v = l\dot{\theta}$, de modo que sua energia cinética é

$$T = \frac{m(l\dot{\theta})^2}{2}.$$

A altura na vertical, em relação à posição em que $\theta = 0$, é dada por $h = l - l\cos\theta$. Segue que a energia potencial gravitacional é

$$V = mgl(1 - \cos\theta).$$

Finalmente, a Lagrangiana do sistema é

$$\boxed{L = T - V = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl(1 - \cos\theta).} \tag{6}$$

(b) A equação de movimento é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

Utilizando a Eq. (6) na equação acima, temos

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta.}$$

(c) Nos pontos de equilíbrio, $dV/d\theta = 0$, o que nos dá $\sin\theta = 0$, ou seja, os pontos procurados são

$$\boxed{\theta = 0 \;\text{ e }\; \theta = \pi.}$$

Para avaliar a estabilidade dos pontos de equilíbrio, analisamos o sinal de

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mgl\cos\theta.$$

Para $\theta = 0$, a expressão acima tem valor positivo (mínimo de V), caracterizando um equilíbrio **estável**, enquanto que para $\theta = \pi$, o sinal é negativo (máximo de V), correspondendo a um ponto de equilíbrio **instável**.

(d) Para pequenas oscilações em torno de $\theta = 0$, podemos aproximar $\sin\theta \approx \theta$. A equação de movimento fica

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta,$$

cuja solução geral é, por inspeção,

$$\theta(t) = A\sin(\omega t + \delta),$$

onde A e δ são constantes arbitrárias determinadas pelas condições iniciais e

$$\boxed{\omega = \sqrt{g/l},}$$

que é a frequência (angular) procurada. Alternativamente, pode-se comparar a Eq. (2) com a equação de movimento de um oscilador harmônico simples uni-dimensional de frequência (angular) ω,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

e inferir que no caso em questão teremos $\omega = \sqrt{g/l}$.

Q3. a) A conservação de energia nos dá

$$E_0 + mc^2 = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} + E, \tag{7}$$

enquanto a conservação de momento linear é

$$\vec{p}_0 + \vec{0} = \vec{p} + \vec{p}_e.$$

b) Da conservação de momento linear

$$p_e^2 = (\vec{p}_0 - \vec{p})^2 = p_0^2 + p^2 - 2pp_0 \cos\theta.$$

Usando que, para os fótons, $p_0 = E_0/c$ e $p = E/c$ e levando na Eq. (7)

$$E_0 + mc^2 = \sqrt{E_0^2 + E^2 - 2EE_0 \cos\theta + m^2 c^4} + E.$$

Isolando a raiz quadrada e elevando a equação ao quadrado

$$\begin{aligned}
\left(E_0 - E + mc^2\right)^2 &= E_0^2 + E^2 - 2EE_0 \cos\theta + m^2 c^4 \\
E_0^2 + E^2 + m^2 c^4 - 2EE_0 + 2mc^2 (E_0 - E) &= E_0^2 + E^2 - 2EE_0 \cos\theta + m^2 c^4 \\
-EE_0 + mc^2 (E_0 - E) &= -EE_0 \cos\theta \\
mc^2 (E_0 - E) &= EE_0 (1 - \cos\theta) .
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{1}{mc^2}(1 - \cos\theta) .} \tag{8}$$

c) Da relação entre a energia e o comprimento de onda dos fótons

$$E = \frac{hc}{\lambda} \qquad \text{e} \qquad E_0 = \frac{hc}{\lambda_0},$$

onde λ é o comprimento de onda do fóton espalhado. Portanto,

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) .$$

Para $\theta = \pi/2$,

$$\boxed{\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}.}$$

c) A energia cinétia do elétron espalhado é

$$K = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 = E_0 - E.$$

Fazendo $\theta = \pi/2$ na Eq. (8)

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} = \frac{1}{mc^2},$$

donde

$$E = \frac{mc^2 E_0}{E_0 + mc^2}.$$

Assim,

$$K = E_0 \left(1 - \frac{mc^2}{E_0 + mc^2}\right) = \frac{hc}{\lambda_0}\left(1 - \frac{mc^2}{\frac{hc}{\lambda_0} + mc^2}\right).$$

Finalmente,

$$\boxed{K = \frac{hc}{\lambda_0} \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_C}}.}$$

Q4. (a) Queremos calcular $\langle n'|\,\hat{x}\,|n\rangle$ e $\langle n'|\,\hat{p}\,|n\rangle$. Utilizando que

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{p},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right),\\ \hat{p} &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right).\end{aligned}$$

Os elementos de matriz pedidos são

$$\begin{aligned}\langle n'|\,\hat{x}\,|n\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle n'|\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)|n\rangle\,,\\ \langle n'|\,\hat{p}\,|n\rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,\langle n'|\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)|n\rangle\,.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\langle n'|\,\hat{a}\,|n\rangle &= \langle n'|\,\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \sqrt{n}\delta_{n',n-1},\\ \langle n'|\,\hat{a}^\dagger\,|n\rangle &= \langle n'|\,\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1},\end{aligned}$$

segue que

$$\boxed{\begin{aligned}\langle n'|\,\hat{x}\,|n\rangle &= \sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\delta_{n',n-1}+\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}\right),\\ \langle n'|\,\hat{p}\,|n\rangle &= i\sqrt{\tfrac{\hbar m\omega}{2}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}-\sqrt{n}\delta_{n',n-1}\right).\end{aligned}}$$

(b) Primeiramente, escrevemos $\hat{x}^2$ em termos de $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$

$$\hat{x}^2 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\left(\hat{a}^\dagger\right)^2\right].$$

O valor esperado procurado é

$$\langle n|\,\hat{x}^2\,|n\rangle = \langle n|\,\frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\left(\hat{a}^\dagger\right)^2\right)|n\rangle\,.$$

Calculamos cada termo separadamente

$$\begin{aligned}\langle n|\,\hat{a}^2\,|n\rangle &= \langle n|\,a\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \sqrt{n}\sqrt{n-1}\delta_{n,n-2} = 0,\\ \langle n|\left(\hat{a}^\dagger\right)^2|n\rangle &= \langle n|\,a^\dagger\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\delta_{n,n+2} = 0,\\ \langle n|\,\hat{a}\hat{a}^\dagger\,|n\rangle &= \langle n|\,a\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle = (n+1)\,\langle n|\,n\rangle = n+1,\\ \langle n|\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle &= \langle n|\,a^\dagger\sqrt{n}\,|n-1\rangle = n\,\langle n|\,n\rangle = n.\end{aligned}$$

Juntando todas as contribuições

$$\boxed{\langle n|\,\hat{x}^2\,|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right).}$$

(c) A energia total média em um auto estado do Hamiltoniano é

$$\langle n| \hat{H} |n\rangle = \hbar\omega \langle n| \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right),$$

onde usamos o valor esperado do operador número calculado no item anterior. A energia potencial média em um auto estado do Hamiltoniano é

$$\langle n| \hat{V} |n\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 \langle n| \hat{x}^2 |n\rangle .$$

Do item anterior

$$\langle n| \hat{V} |n\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar\omega}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Finalmente

$$\boxed{\frac{\langle n| \hat{H} |n\rangle}{\langle n| \hat{V} |n\rangle} = 2.}$$

(d) Primeiro notamos que

$$i\hbar\frac{d\hat{a}_H(t)}{dt} = \left[\hat{a}_H(t),\hat{H}\right] = e^{i\hat{H}t/\hbar} \left[\hat{a},\hat{H}\right] e^{-i\hat{H}t/\hbar},$$

já que o Hamiltoniano comuta com as exponenciais. O comutador procurado é

$$\left[\hat{a},\hat{H}\right] = \hbar\omega \left[\hat{a}, \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\right] = \hbar\omega \left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\hat{a}\right],$$

onde usamos que um número comuta com qualquer operador. Mas

$$\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\hat{a}\right] = \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^2\right) = \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{a} = \left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]\hat{a} = \hat{a},$$

já que $\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = 1$. Assim,

$$i\hbar\frac{d\hat{a}_H(t)}{dt} = \hbar\omega\; e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{a}e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \hbar\omega\hat{a}_H(t).$$

Resolvendo essa equação diferencial

$$\boxed{\hat{a}_H\left(t\right) = \hat{a}\left(0\right)e^{-i\omega t} = \hat{a}e^{-i\omega t}.}$$

Q5. a) O gráfico pedido é mostrado na Fig. 5:

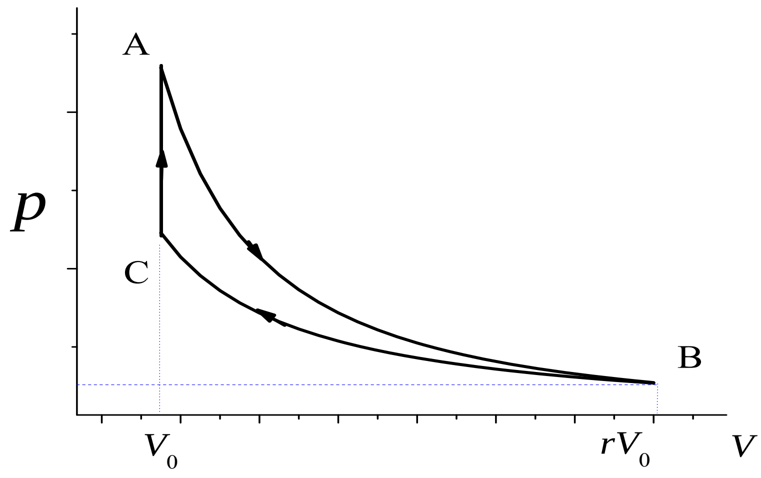

Figura 1: Gráfico esquemático mostrando o ciclo num diagrama p x V.

b) (i) De maneira geral, o trabalho realizado pelo gás num processo reversível quando o volume varia de V_1 até V_2 é dado por

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

Portanto, o trabalho realizado no trecho CA é nulo, pois não há variação de volume. O trecho AB é adiabático, portanto não há troca de calor Q_{AB} entre o gás e a vizinhança. Da primeira lei da termodinâmica $\Delta U = Q - W$ (U é a energia interna),

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = nc_V(T_A - T_B),$$

onde usamos a expressão para a energia interna de um gás ideal. Finalmente, na isoterma BC, usando a equação de estado do gás ideal,

$$W_{BC} = \int_{rV_0}^{V_0} p dV = -nRT_B \ln r.$$

Como $T_C = T_B$ e as isotermas são hipérboles $p = nRT/V$ num gráfico p x V, segue que $T_{\min} = T_B < T_A = T_{\max}$. Logo, usando $c_V = R/(\gamma - 1)$, o trabalho total é dado por

$$\boxed{W_{\text{total}} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_{\max} - T_{\min}) - nRT_{\min} \ln r.}$$

(ii) Só há troca de calor entre o gás e a vizinhança nos trechos BC e CA, pois o processo AB é adiabático. Como BC é uma isoterma, a energia interna do gás se mantém constante e, usando a primeira lei,

$$Q_{BC} = W_{BC} = -nRT_B \ln r < 0,$$

o que corresponde a uma liberação de calor do gás para sua vizinhança. Na isocórica CA, o trabalho é nulo e, usando novamente a primeira lei,

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} = nc_V(T_A - T_C) = nc_V(T_{\max} - T_{\min}).$$

Portanto, o calor injetado no gás é

$$\boxed{Q_{\text{injetado}} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_{\max} - T_{\min}).}$$

c) O rendimento é dado por

$$\boxed{\eta = \frac{W_{\text{total}}}{Q_{\text{injetado}}} = 1 - \frac{(\gamma - 1)T_{\min}}{(T_{\max} - T_{\min})} \ln r.}$$

d) Na adiabática AB temos que

$$p_A V_0^\gamma = p_B (rV_0)^\gamma \Rightarrow p_B = p_A / r^\gamma,$$

e na isoterma BC temos que

$$p_B r V_0 = p_C V_0 \Rightarrow p_C = r p_B,$$

donde

$$r = \frac{p_C}{p_B} = \frac{p_C}{p_A} r^\gamma \Rightarrow r^{\gamma - 1} = \frac{p_A}{p_C}.$$

Da equação de estado dos gases ideais para a isovolumétrica CA

$$\frac{p_A}{p_C} = \frac{T_A}{T_C} = \frac{T_{\max}}{T_{\min}}.$$

Assim,

$$r = \left(\frac{T_{\max}}{T_{\min}}\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Levando na expressão para o rendimento,

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_{\min}}{(T_{\max} - T_{\min})} \ln\left(\frac{T_{\max}}{T_{\min}}\right).}$$

Se $T_{\max} = 2T_{\min}$, temos que

$$\eta = 1 - \ln 2 \approx 0.31,$$

e o rendimento da máquina de Carnot correspondente é

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 0.5,$$

de forma que

$$\boxed{\frac{\eta}{\eta_{\text{Carnot}}} = 2(1 - \ln 2).}$$

O rendimento da máquina é menor do que o da máquina de Carnot correspondente. Isso é o esperado porque uma das consequências da segunda lei da termodinâmica é que nenhuma máquina operando entre dois reservatórios a temperaturas $T_{\max}$ e $T_{\min}$ pode ter rendimento maior que a máquina de Carnot entre esses reservatórios.