

EUF

**Exame Unificado
das Pós-graduações em Física**

Para o segundo semestre de 2016

Respostas esperadas

Parte 2

- **Estas são sugestões de possíveis respostas.**
Outras possibilidades também podem ser consideradas corretas, desde que equivalentes às respostas sugeridas abaixo.

Q6. a) Pela lei de Gauss, de maneira geral, sabemos que:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_V}{\epsilon_0}, \quad (9)$$

onde a integral é feita sobre a superfície S de uma região V e q_V é a carga total contida em V . Tomaremos, nessa questão, regiões esféricas de raio r centradas no centro da esfera isolante. Por simetria, o campo elétrico apontará sempre na direção radial, ou seja, $\vec{E} = E\hat{r}$.

i) Campo elétrico para $r < a$: Neste sub-item, escolhemos regiões esféricas de raio $r < a$, representadas pelas linhas pontilhadas na Fig. 2. Desta forma, a carga em V é

$$\begin{aligned} q_V &= \rho V, \\ q_V &= \frac{4\pi\rho}{3}r^3. \end{aligned}$$

Aplicando a Eq. (9) e usando que o campo elétrico é radial

$$E4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho}{3\epsilon_0}r^3.$$

Portanto, a magnitude do campo elétrico será dada por

$$\boxed{E = \frac{\rho}{3\epsilon_0}r.}$$

ii) Campo elétrico para $a < r < b$: Neste caso, as regiões esféricas tem raio r tal que $a < r < b$, como mostrado na Fig. 3. A carga total contida em V é $q_V = Q$. Aplicando a Eq. (9) e usando que o campo elétrico é radial

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Portanto, a magnitude do campo elétrico será

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.}$$

iii) Campo elétrico para $b < r < c$: Nesta região, queremos o campo elétrico dentro de um condutor em equilíbrio eletrostático (veja a Fig. 4), que sempre se anula. Portanto,

$$\boxed{E = 0.}$$

(iv) Campo elétrico para $r > c$: Agora, as regiões esféricas tem raio $r > c$, como mostrado na Fig. 5. A carga contida em V é $q_V = Q$. Aplicando novamente a Eq. (9) e usando que o campo elétrico é radial

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Portanto, a magnitude do campo elétrico será

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.}$$

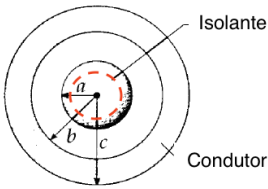


Figura 2: Região V no caso (i) $r < a$.

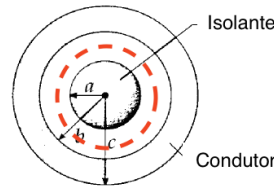


Figura 3: Região V no caso (ii) $a < r < b$.

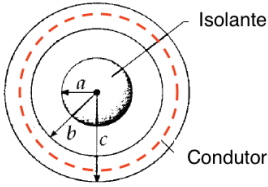


Figura 4: Região V no caso (iii) $b < r < c$.

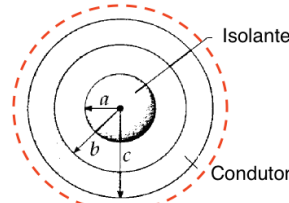


Figura 5: Região V no caso (iv) $r > c$.

b) Em todo condutor em equilíbrio eletrostático, a carga líquida se distribui na sua superfície. Vamos denotar por q_1 a carga induzida na superfície interna do condutor ($r = b$) e q_2 a carga induzida na superfície externa do condutor ($r = c$). Como dentro do condutor temos $E = 0$, aplicando a Eq. (9) a uma região como as do item (a)(iii) (raio r , tal que $b < r < c$), a carga total em V nesse caso é nula. Portanto,

$$\begin{aligned} q_V &= Q + q_1 = 0 \\ \Rightarrow q_1 &= -Q. \end{aligned}$$

Como, por simetria, a carga se distribui de maneira uniforme na superfície, segue que a densidade de carga induzida em $r = b$ é

$$\sigma_1 = -\frac{Q}{4\pi b^2}.$$

Como o condutor está descarregado, por conservação de carga, temos que

$$\begin{aligned} Q_{condutor} = 0 &= q_1 + q_2 \\ q_2 &= -q_1 \end{aligned}$$

Usando novamente que, por simetria, a carga se distribui de maneira uniforme na superfície, a densidade de carga induzida em $r = c$ é

$$\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi c^2}.$$

c) Esboço do gráfico $E \times r$:

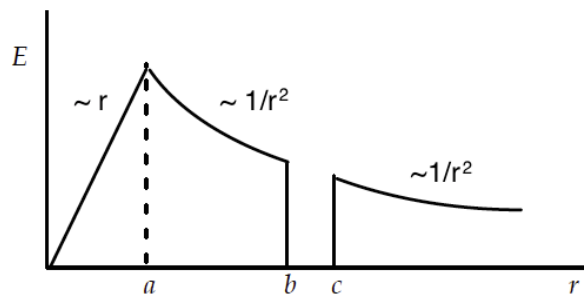


Figura 6: Esboço do gráfico $E \times r$.

Q7. a) Pelo formulário podemos ver que no vácuo (onde $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$), as equações de Maxwell são dadas por

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0; \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad (11)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (12)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (13)$$

Tomando o rotacional da Eq. (12) temos que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 0. \quad (14)$$

Utilizando a primeira identidade vetorial dada no enunciado juntamente com a Eq. (10), podemos re-escrever o primeiro termo do lado esquerdo da equação acima como

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}.$$

Desta forma a Eq. (14) pode ser re-escrita, trocando a ordem das derivadas parciais, como

$$-\nabla^2 \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = 0.$$

Utilizando a Eq. (13) obtemos a equação da onda para o campo elétrico

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.}$$

Tomando agora o rotacional da Eq. (13) temos que

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) - \mu_0 \epsilon_0 \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

Utilizando a primeira identidade vetorial dada no enunciado juntamente com a Eq. (11) e trocando a ordem das derivadas parciais, podemos re-escrever a equação acima como

$$-\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) = 0. \quad (15)$$

Finalmente, utilizando a Eq. (12) no segundo termo da Eq. (15) obtemos

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.}$$

b) A equação de onda para uma função $f(\vec{r}, t)$ se propagando com velocidade v é dada por

$$\boxed{\nabla^2 f(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}, t)}{\partial t^2}.} \quad (16)$$

Comparando com as Eqs. (15) e (16), notamos que a velocidade de propagação de \vec{E} e \vec{B} é dada por

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c.} \quad (17)$$

c) **(0,2 pontos)** Supondo que \vec{E} aponte na direção \hat{x} e se propague na direção \hat{z} , podemos escrever que

$$\vec{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{x}, \quad (18)$$

$$\vec{B} = B_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{y}. \quad (19)$$

O campos “físicos” podem ser escritos como (supondo E_0 e B_0 reais)

$$\vec{E}_f = \text{Re}(\vec{E}) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x}, \quad (20)$$

$$\vec{B}_f = \text{Re}(\vec{B}) = B_0 \cos(kz - \omega t) \hat{y}. \quad (21)$$

Essas soluções, de fato, satisfazem as quatro Eqs. (10-13) desde que $\omega = ck$, como pode ser verificado. De maneira geral, a direção de \vec{E} é arbitrária, desde que seja perpendicular a \vec{z} . Uma vez fixada a direção de \vec{E} , \vec{B} tem que ser perpendicular a \vec{E} e \vec{z} . Os *módulos* de \vec{E} e \vec{B} são:

$$E = E_0 \cos(kz - \omega t),$$

$$B = B_0 \cos(kz - \omega t).$$

d) Tomando a divergência da Eq. (13) temos

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{E}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J}. \quad (22)$$

O primeiro termo se anula pela segunda identidade dada no enunciado. Usando a Eq. (10)

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0}$$

Esta equação expressa a *lei de conservação da carga*: em sua forma integral, ela implica que a taxa de variação temporal da carga total incluída em uma região espacial fixa é igual ao fluxo de corrente elétrica entrando pela superfície que delimita a região.

Q8. (a) Das relações fornecidas

$$\hat{H}|\pm\rangle = -\gamma B \hat{S}_z |\pm\rangle = \mp \frac{\gamma B \hbar}{2} |\pm\rangle$$

Portanto, $|\pm\rangle$ são auto-vetores do Hamiltoniano com auto-valores dados, respectivamente, por

$$E_{\pm} = \mp \frac{\gamma \hbar B}{2}.$$

(b) De maneira geral,

$$|\psi(t)\rangle = [c_+ e^{-i(E_+/\hbar)t} |+\rangle + c_- e^{-i(E_-/\hbar)t} |-\rangle],$$

onde c_{\pm} são coeficientes determinados pelas condições iniciais. Usando as expressões dos auto-valores do item anterior

$$|\psi(t)\rangle = \left[c_+ e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle + c_- e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle \right].$$

Em $t = 0$ temos

$$|\psi(t=0)\rangle = [c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle - |-\rangle],$$

donde $c_+ = -c_- = 1/\sqrt{2}$. Portanto,

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle \right].$$

(c) A média de \hat{S}_i é dada por

$$\langle \hat{S}_i \rangle = \langle \psi(t) | \hat{S}_i | \psi(t) \rangle$$

Utilizando a $|\psi(t)\rangle$ obtida no item anterior

$$\begin{aligned} \hat{S}_x |\psi(t)\rangle &= \hat{S}_x \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle \right] \\ &= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle \right], \\ \hat{S}_y |\psi(t)\rangle &= \hat{S}_y \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle \right] \\ &= i \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle + e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle \right], \\ \hat{S}_z |\psi(t)\rangle &= \hat{S}_z \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle \right] \\ &= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle + e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle \right]. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 \langle \psi(t) | \hat{S}_x | \psi(t) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} \langle + | - e^{i\frac{\gamma B}{2}t} \langle - | \right] \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} | - \rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} | + \rangle \right] \\
 &= -\frac{\hbar}{2} \cos(\gamma B t) \\
 \langle \psi(t) | \hat{S}_y | \psi(t) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} \langle + | - e^{i\frac{\gamma B}{2}t} \langle - | \right] i \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} | - \rangle + e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} | + \rangle \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2} \sin(\gamma B t) \\
 \langle \psi(t) | \hat{S}_z | \psi(t) \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} \langle + | - e^{i\frac{\gamma B}{2}t} \langle - | \right] \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left[e^{i\frac{\gamma B}{2}t} | + \rangle + e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} | - \rangle \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$ \begin{aligned} \langle \hat{S}_x \rangle &= -\frac{\hbar}{2} \cos(\gamma B t) \\ \langle \hat{S}_y \rangle &= \frac{\hbar}{2} \sin(\gamma B t) \\ \langle \hat{S}_z \rangle &= 0 \end{aligned} $

(d) Queremos t tal que

$$\begin{aligned}
 |\psi(0)\rangle &= |\psi(t)\rangle, \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle - |-\rangle] &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{+i\frac{\gamma B}{2}t} |+\rangle - e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} |-\rangle \right],
 \end{aligned}$$

onde usamos o resultado do item (b). Por inspeção nota-se que a condição a ser satisfeita é

$$e^{\pm i\frac{\gamma B}{2}t} = 1 \Rightarrow \frac{\gamma B}{2}t = 2n\pi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

O menor valor de t corresponde a $n = 1$

$ t = \frac{4\pi}{\gamma B}. $

Q9. a) Em qualquer outro referencial S' , o intervalo invariante terá o mesmo valor

$$\Delta s^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2 (\Delta t')^2.$$

Se nesse referencial os eventos ocorressem no mesmo ponto do espaço, $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$ e teríamos $\Delta s^2 = -c^2 (\Delta t')^2 < 0$, o que contradiz o enunciado. Portanto, esse referencial não existe.

b) Como o intervalo invariante é positivo

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 > c^2 \Delta t^2.$$

Supondo a propagação de um sinal com velocidade \vec{V} entre os eventos, teríamos $\Delta x = V_x \Delta t$, $\Delta y = V_y \Delta t$ e $\Delta z = V_z \Delta t$. Levando na desigualdade acima

$$(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \Delta t^2 > c^2 \Delta t^2.$$

Assim, teríamos $V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V^2 > c^2$. Portanto, o sinal teria que se propagar com uma velocidade maior do que a da luz, o que é impossível.

c) (i) Como o relógio está em repouso em S' , $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$ e $\Delta s^2 = -c^2 (\Delta t')^2 < 0$. O sinal é negativo.

(ii) Observados no referencial S , os eventos são tais que $\Delta x = V_x \Delta t$, $\Delta y = V_y \Delta t$ e $\Delta z = V_z \Delta t$. Logo,

$$\Delta s^2 = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \Delta t^2 - c^2 \Delta t^2 = -c^2 (\Delta t')^2,$$

onde usamos que o valor do intervalo invariante não depende do referencial. Segue que

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Delta t.$$

d) (i) No referencial de laboratório S , a separação espacial entre os eventos é a distância entre F e D e a separação temporal é o tempo que a partícula leva para viajar entre um e outro

$$\Delta x = L \quad \text{e} \quad \Delta t = \frac{L}{V}.$$

(ii) No referencial da partícula, os eventos ocorrem no mesmo ponto espacial e a separação temporal entre eles pode ser obtida usando o resultado do item (c)(ii)

$$\Delta x' = 0 \quad \text{e} \quad \Delta t' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left(\frac{L}{V} \right).$$

(iii) Do ponto de vista de S' , $L' = V \Delta t'$, pois F e D (e o referencial S) se movem com velocidade $-\vec{V}$. Usando a expressão para $\Delta t'$ obtida no item anterior

$$L' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} L.$$

Q10. a) A função de partição é obtida somando sobre todos os estados do sistema com o peso de Boltzmann

$$Z = \text{Tre}^{-\beta H} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx dp}{h} \exp \left[-\beta \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \right],$$

onde $\beta^{-1} = k_B T$. Usando

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

obtemos

$$Z = \frac{\pi}{h} \sqrt{\frac{2m}{\beta}} \sqrt{\frac{2}{\beta m \omega^2}}$$

$$\boxed{Z = \frac{2\pi k_B T}{h\omega} = \frac{k_B T}{\hbar\omega}.}$$

b) Como os osciladores são independentes, o número médio $n(x)dx$ pedido é igual a $3N$ vezes a probabilidade de um oscilador ter sua posição no intervalo considerado. Esta probabilidade, por sua vez, é igual ao peso de Boltzmann integrado sobre todos os valores de momento linear, donde

$$n(x)dx = \frac{3N dx}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{h} \exp \left[-\beta \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \right]$$

$$\boxed{n(x)dx = 3N \omega dx \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp \left(-\frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T} \right).}$$

c) A energia potencial média por oscilador é

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \frac{1}{3N} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) n(x) dx \\ &= \omega \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{m\omega^2 x^2}{2k_B T} \right) dx \\ &= \omega \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} (k_B T) \sqrt{\frac{2k_B T}{m\omega^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Usando que $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$,

$$\boxed{\langle U \rangle = \frac{k_B T}{2}.}$$

Esse resultado é o esperado pelo teorema da equipartição, que diz que o valor médio clássico de cada grau de liberdade quadrático da Hamiltoniana (como a energia potencial) é $k_B T/2$.

d) Temos que

$$\frac{m\omega^2 x_0^2}{2} = \frac{k_B T}{2} \Rightarrow f = \frac{x_0}{d} = \frac{1}{\omega d} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}.$$

Para os dados fornecidos

$$\boxed{f \approx 0.03 = 3\%.}$$