

**PRINCÍPIO VARIACIONAL :
DA HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA
A
INTEGRAL DE TRAJETÓRIAS DE
FEYNMANN**

Takeshi Kodama

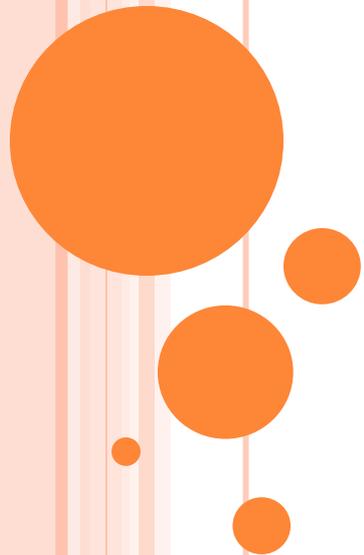


**PRINCÍPIO VARIACIONAL :
DA HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA
A
INTEGRAL DE TRAJETÓRIAS DE
FEYNMANN**

**Takeshi Kodama
Com colaboração de
Tomoi Koide
Carlos Aguiar**



FORMULAÇÃO VARIACIONAL



FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Pode obter expressão matemática complexa a partir de **uma quantidade Escalar**



FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Pode obter expressão matemática complexa a partir de **uma quantidade Escalar**

Facilitar visualizar o significado físico ...



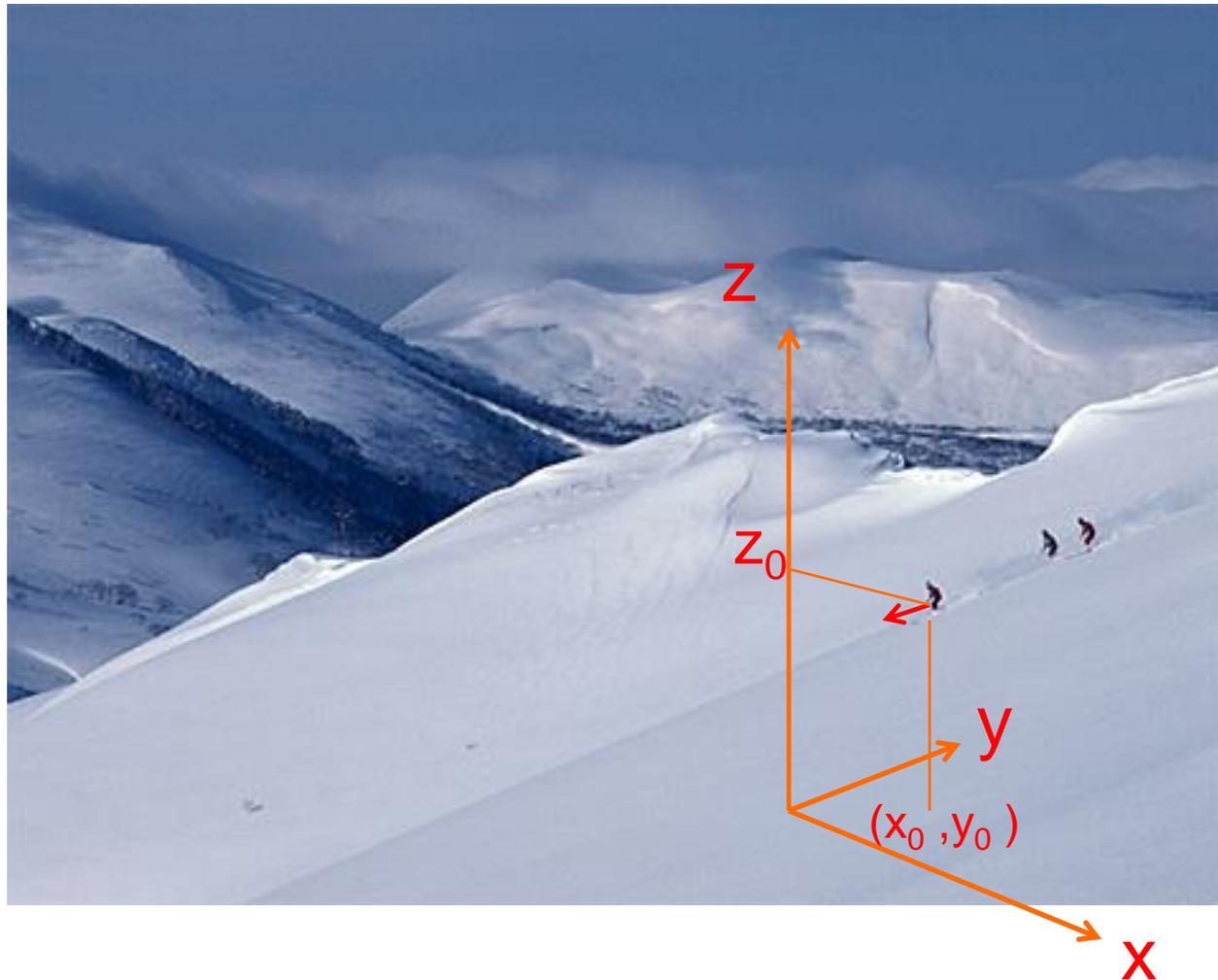
Exemplo (Física I):

Como expressar a *direção mais ingrime*?



Exemplo (Física I):

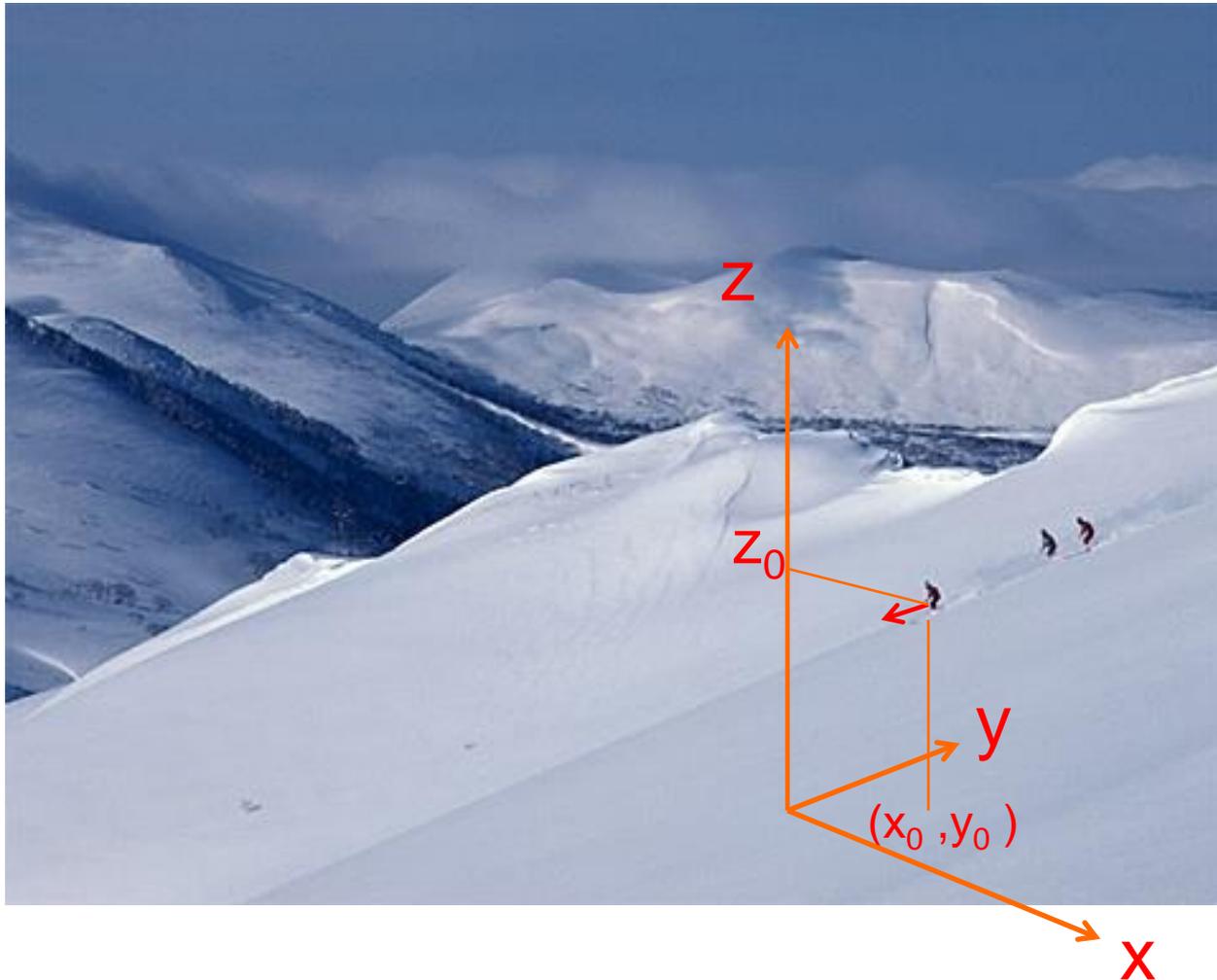
Como expressar a *direção mais ingrime*?



Exemplo (Física I):

Como expressar a direção mais íngreme?

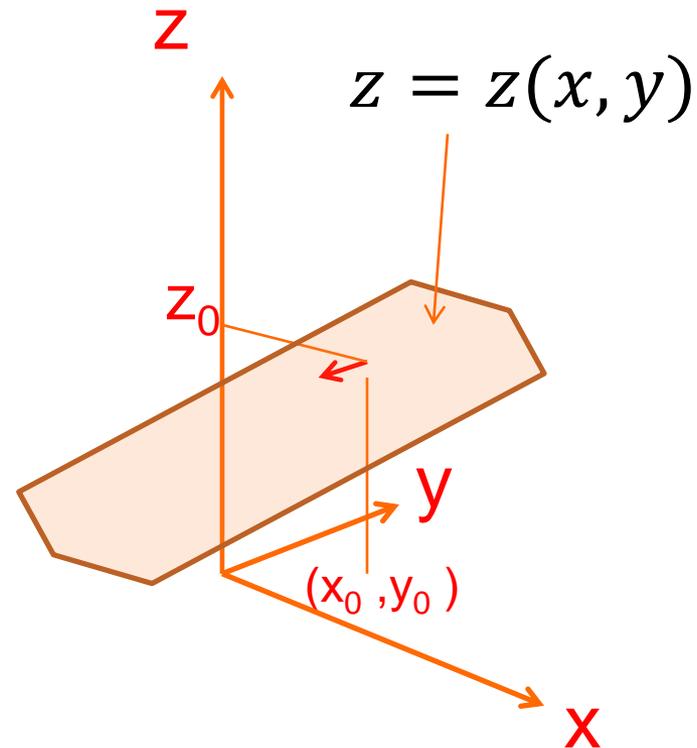
Mais íngreme = Maior variação de Z (altura) para um passo...



Mais ingreme = Maior variação de Z (altura) para um passo...

$$\Delta z(dx, dy) \equiv \vec{a} \cdot \nabla z(x_0, y_0)$$

$$\delta \Delta z(a_x, a_y) = 0,$$



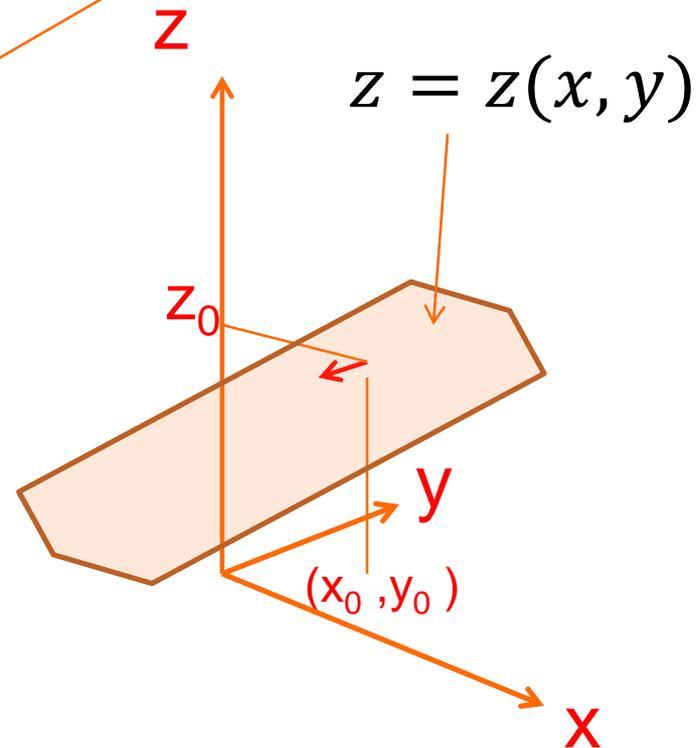
Mais ingreme = Maior variação de Z (altura) para um passo...

$$\Delta z(a_x, a_y) \equiv \vec{a} \cdot \nabla z(x_0, y_0)$$

$$\delta \Delta z(a_x, a_y) = 0,$$

com

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \text{Const.}$$



Mais ingreme = Maior variação de Z (altura) para um passo...

$$\Delta z(a_x, a_y) \equiv \vec{a} \cdot \nabla z(x_0, y_0)$$

$$\delta \Delta z(a_x, a_y) = 0,$$

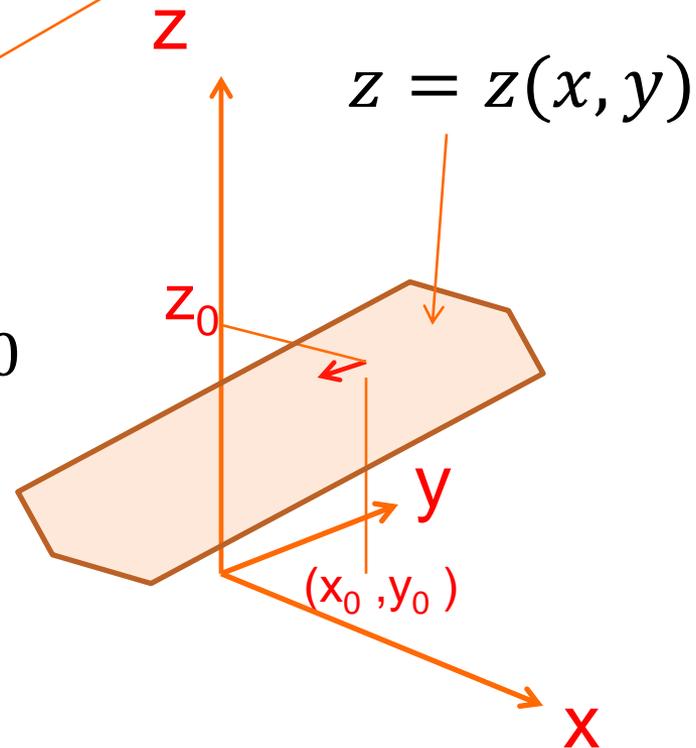
com

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \text{Const.}$$

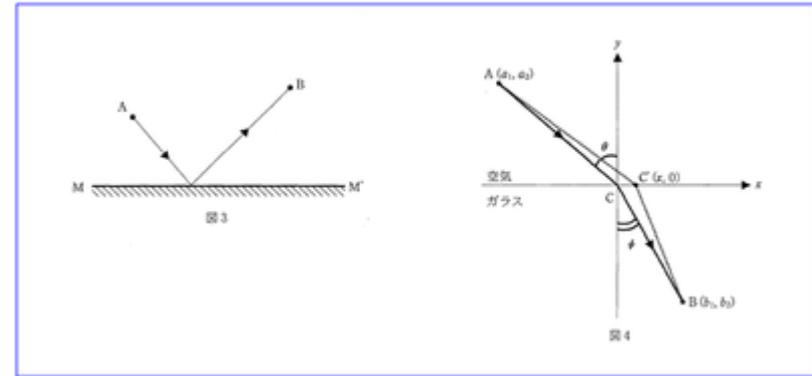
$$\delta \{ \vec{a} \cdot \nabla z(x_0, y_0) - \mu \vec{a} \cdot \vec{a} \} = 0$$

$$\nabla z(x_0, y_0) = 2\mu \vec{a}$$

$$\vec{a} = \text{Const.} \times \nabla z(x_0, y_0)$$



PRIMEIROS PASSOS NA FÍSICA...



Analogia com ótica com mecânica com conceito de miminizar “Ação”

Pierre-Louis Moreau de Maupertuis
Julho 17, 1698 – Julho 27, 1759

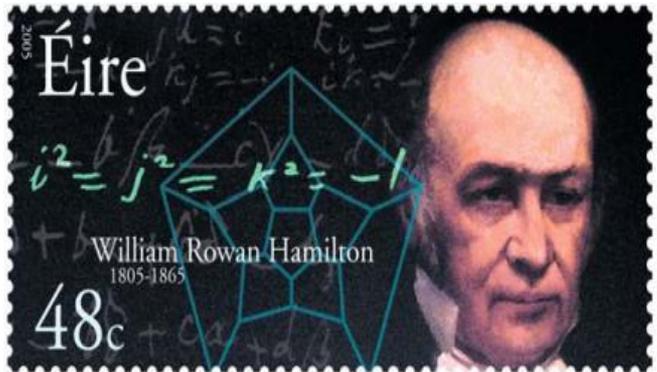
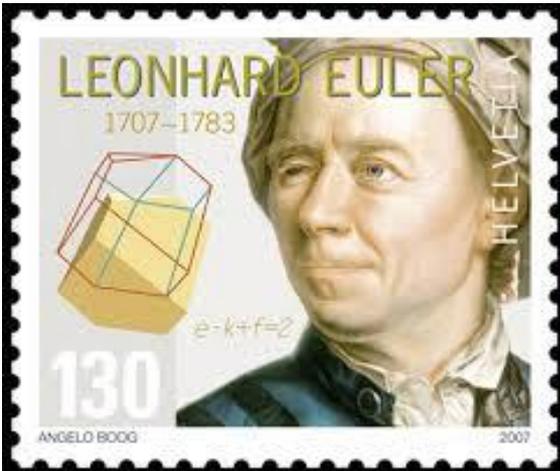


PRINCÍPIO VARIACIONAL DA MECÂNICA CLÁSSICA

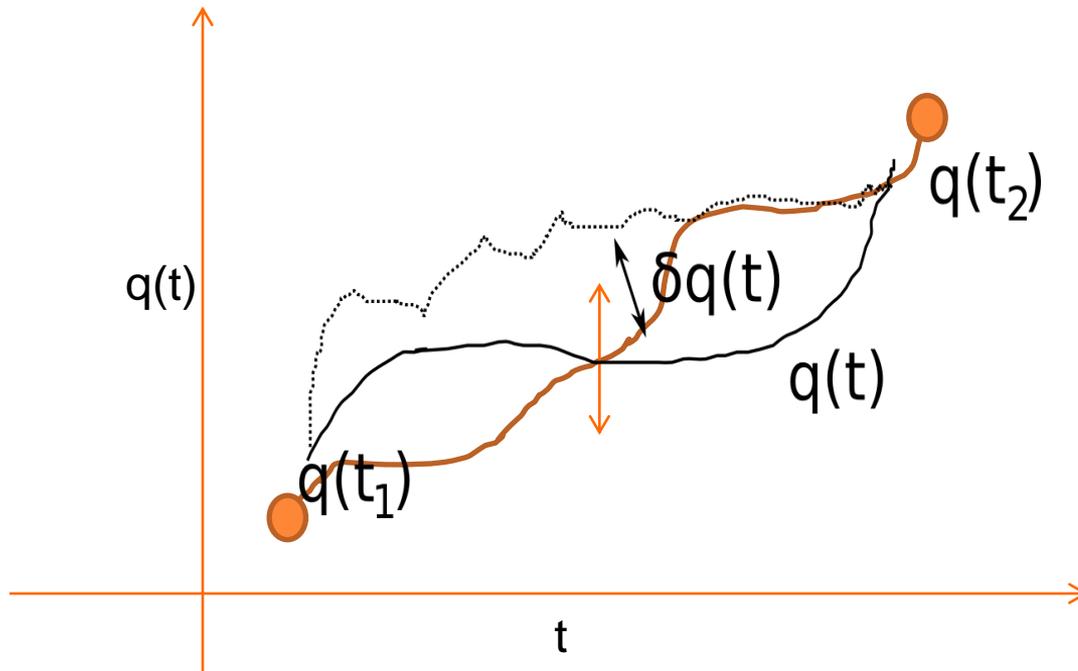
$$I[q(t)] = \int dt L(q, \frac{dq}{dt}) \rightarrow \delta I[q(t)] = 0, \quad \forall \delta q(t)$$

ou

$$I[q(t), p(t)] = \int dt \left\{ p \frac{dq}{dt} - H(q, p) \right\}$$
$$\rightarrow \delta I[q(t), p(t)] = 0, \quad \forall \delta q(t), \delta p(t)$$

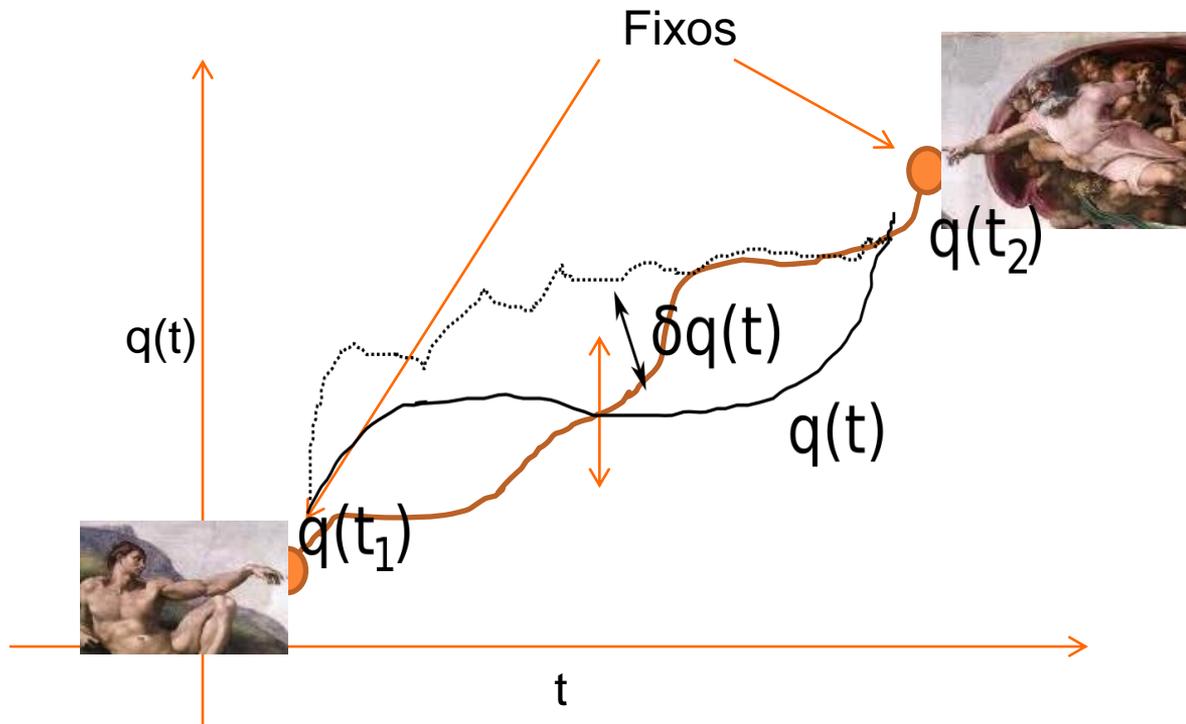


$$\delta I[q(t)] = 0, \quad \forall \delta q(t)$$



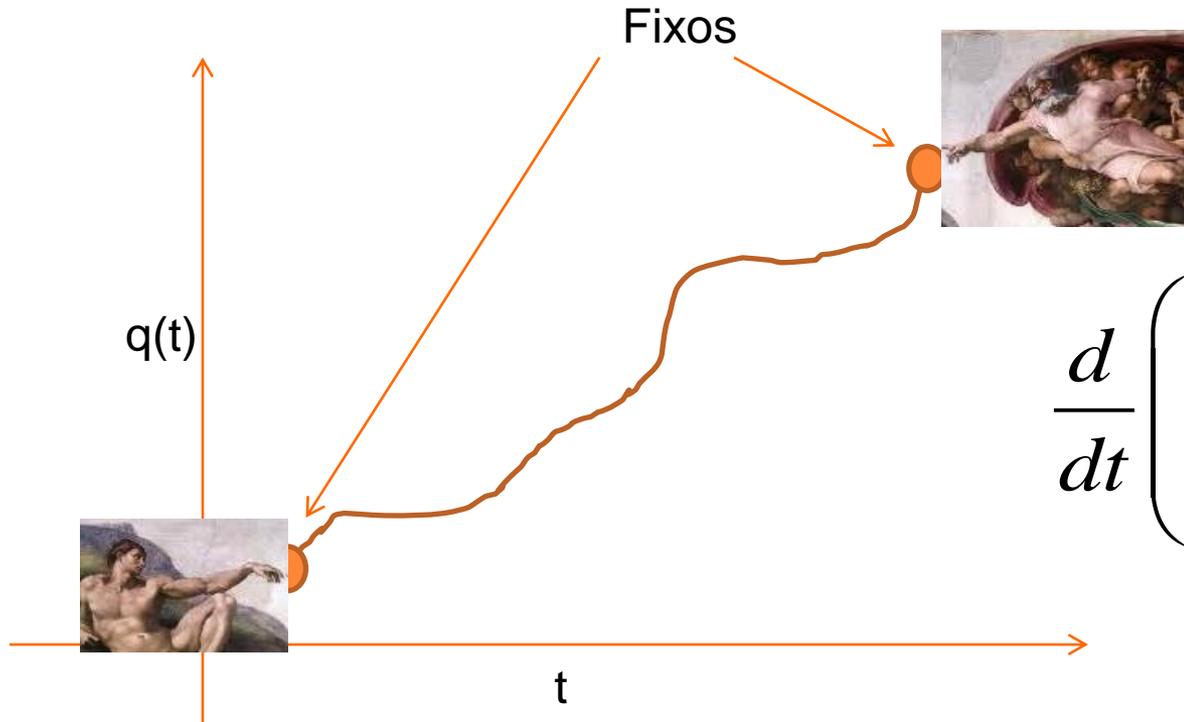
IMPORTANTE !

$$\delta I[q(t)] = 0, \quad \forall \delta q(t)$$



IMPORTANTE !

$$\delta I[q(t)] = 0, \quad \forall \delta q(t)$$



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Embora, o Princípio Variacional usa a informação de futuro, o resultante se tornar ao problema de condição inicial !!



OUTROS ASPECTOS FUNDAMENTAIS DO FORMALISMO VARIACIONAL

SIMETRIA E LEI DA CONSERVAÇÃO



Amalie Emmy Noether

Março, 23, 1882 - abril, 14, 1935



OUTROS ASPECTOS FUNDAMENTAIS DO FORMALISMO VARIACIONAL

SIMETRIA E LEI DA CONSERVAÇÃO



A ação é escalar

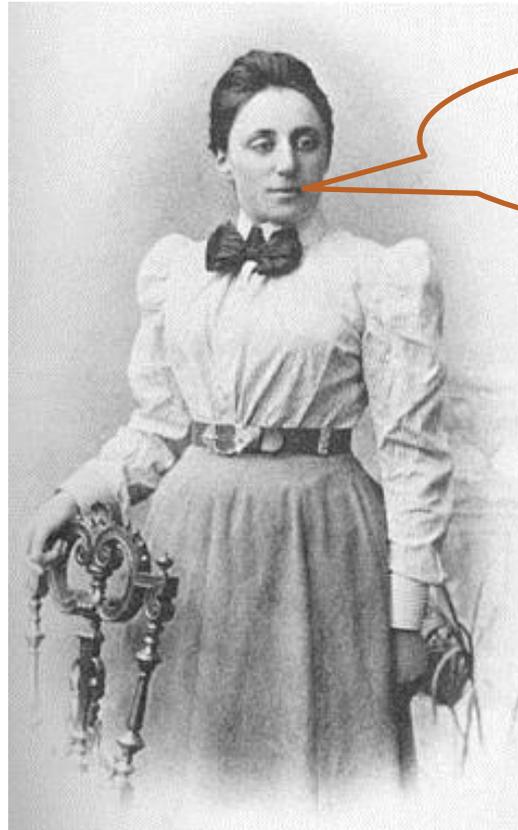
Amalie Emmy Noether

Março, 23, 1882 - abril, 14, 1935



OUTROS ASPECTOS FUNDAMENTAIS DO FORMALISMO VARIACIONAL

SIMETRIA E LEI DA CONSERVAÇÃO



A ação é escalar

Amalie Emmy Noether

Março, 23, 1882 - abril, 14, 1935



OUTROS ASPECTOS FUNDAMENTAIS DO FORMALISMO VARIACIONAL

SIMETRIA E LEI DA CONSERVAÇÃO

$$I_{QM} [\psi] = \int \langle \psi | i\hbar\partial_t - H | \psi \rangle dt$$

Na Mecânica Quântica, esse papel fundamental do Princípio Variacional foi substituído pela teoria de representação num espaço vetorial....



UMA VEZ O PRINCÍPIO VARIACIONAL FICA
ESTABELECIDO.....

$$I_{True} = I_{True} \left[\left\{ \vec{q}(t) \right\} \right],$$

$$\delta I_{True} = 0,$$



Uso para Método de Aproximação

$$\vec{q}(t) \cong \sum_{i=1}^N C_i(t) \vec{n}_i$$

$$I_{True} \Rightarrow I_{App} \left[\left\{ C_i(t), i = 1, \dots, N \right\} \right],$$

$$\delta I_{App} = 0,$$

$$\text{para } \left\{ C_i(t), i = 1, \dots, N \right\}$$



UMA VEZ O PRINCÍPIO VARIACIONAL FICA ESTABELECIDO.....

$$I_{True} = I_{True} \left[\left\{ \vec{q}(t) \right\} \right],$$

$$\delta I_{True} = 0,$$



Uso para Método de Aproximação / ou Modelagem

$$\vec{q}(t) \cong \sum_{i=1}^N C_i(t) \vec{n}_i$$

$$I_{True} \Rightarrow I_{App} \left[\left\{ C_i(t), i = 1, \dots, N \right\} \right],$$

$$\delta I_{App} = 0,$$

para $\{C_i(t), i = 1, \dots, N\}$

$$\vec{q}(t) \Rightarrow \xi_M$$

$$I_{True} \Rightarrow I_{Model} \left[\xi_M \right],$$

$$\delta I_{Model} = 0,$$

para ξ_M



GRANDE VANTAGEM DA ABORDAGEM VARIACIONAL

UMA VEZ ESTABELECIDO O PRINCÍPIO VARIACIONAL DO DINAMICA DE UM SISTEMA, A ABORDAGEM VARIACIONAL FORNECE A **MELHOR (OTIMIZADA)** SOLUÇÃO DO PROBLEMA PARA OS GRAUS DE LIBERDADE ESCOLHIDOS.



EXEMPLOS

$$I_{QM} [\psi] = \int \langle \psi | i\hbar \partial_t - H | \psi \rangle dt$$

- Hartree-Fock Approx.
- QMD Model
- ...



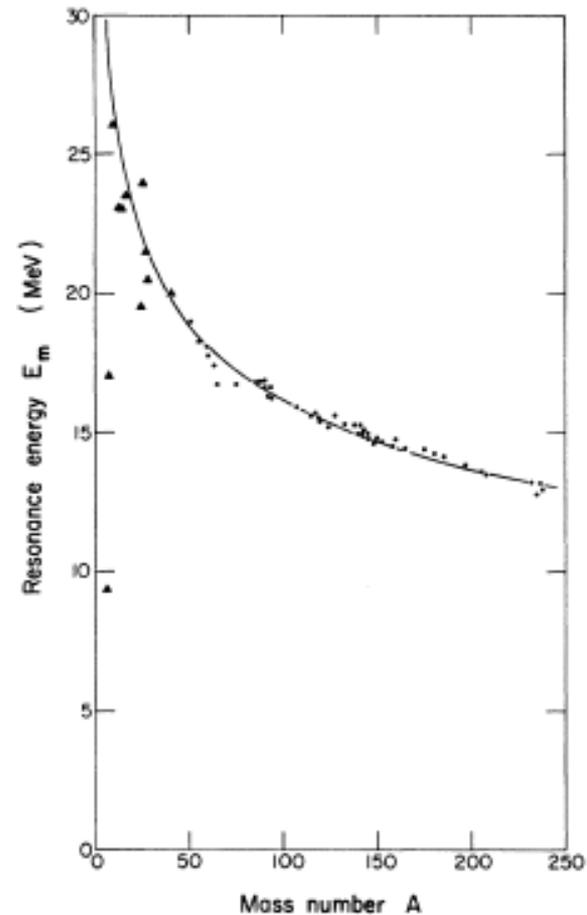
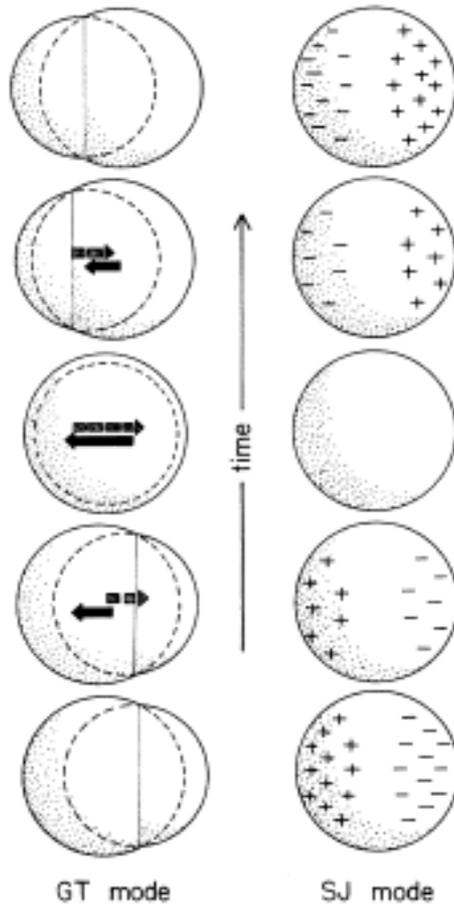
EXEMPLO: RESSONÂNCIA GIGANTE NUCLEAR

PHYSICAL REVIEW C

VOLUME 15, NUMBER 6

JUNE 1977

Droplet model of the giant dipole resonance*



PROGRAMA DE COLISÕES NUCLEARES ULTRA-RELATIVÍSTICAS

- Observar o estado da matéria com o desconfinamento de quarks...

Plasma de Quarks e Gluons

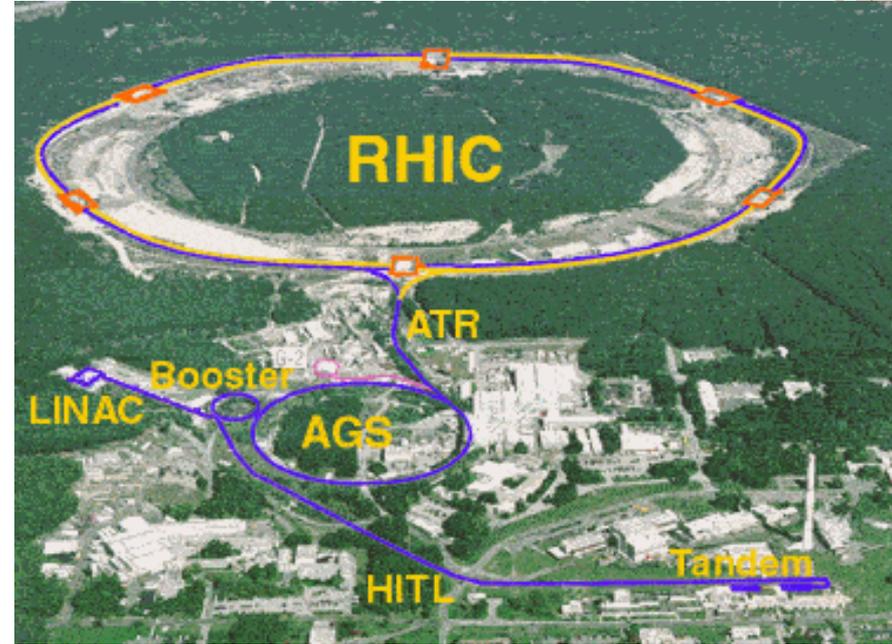
i.e. Utilizar os núcleos como





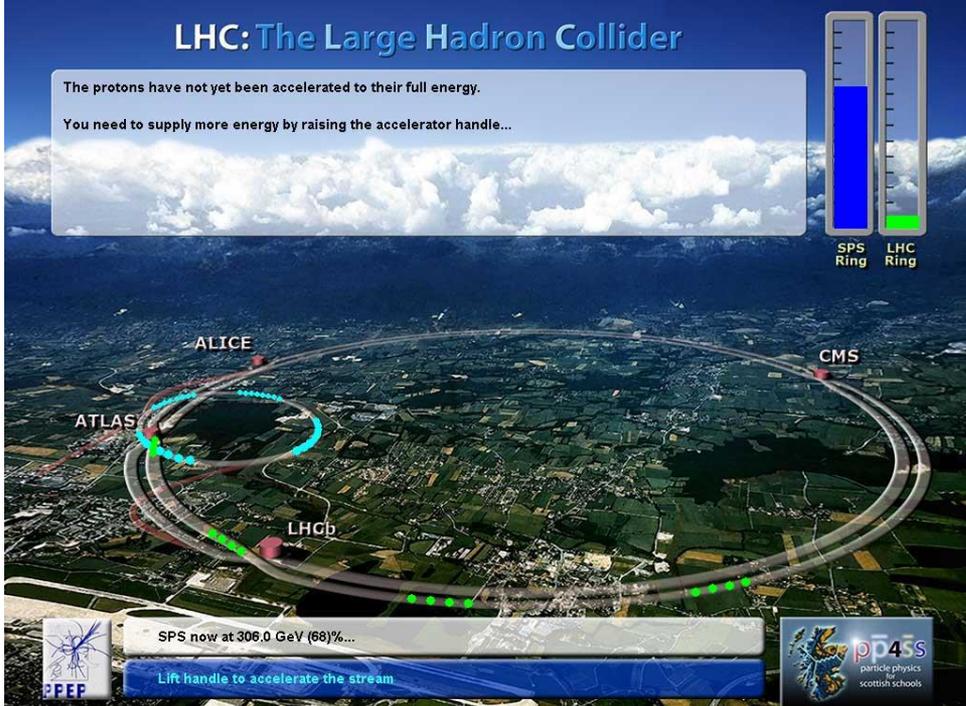
Bevalac – Berkeley ('70)

AGS ('80), RHIC – BNL (2000)



LHC: The Large Hadron Collider

The protons have not yet been accelerated to their full energy.
 You need to supply more energy by raising the accelerator handle...



SPS ('90), LHC – CERN ('2010 -)



SPS now at 306.0 GeV (68)%...

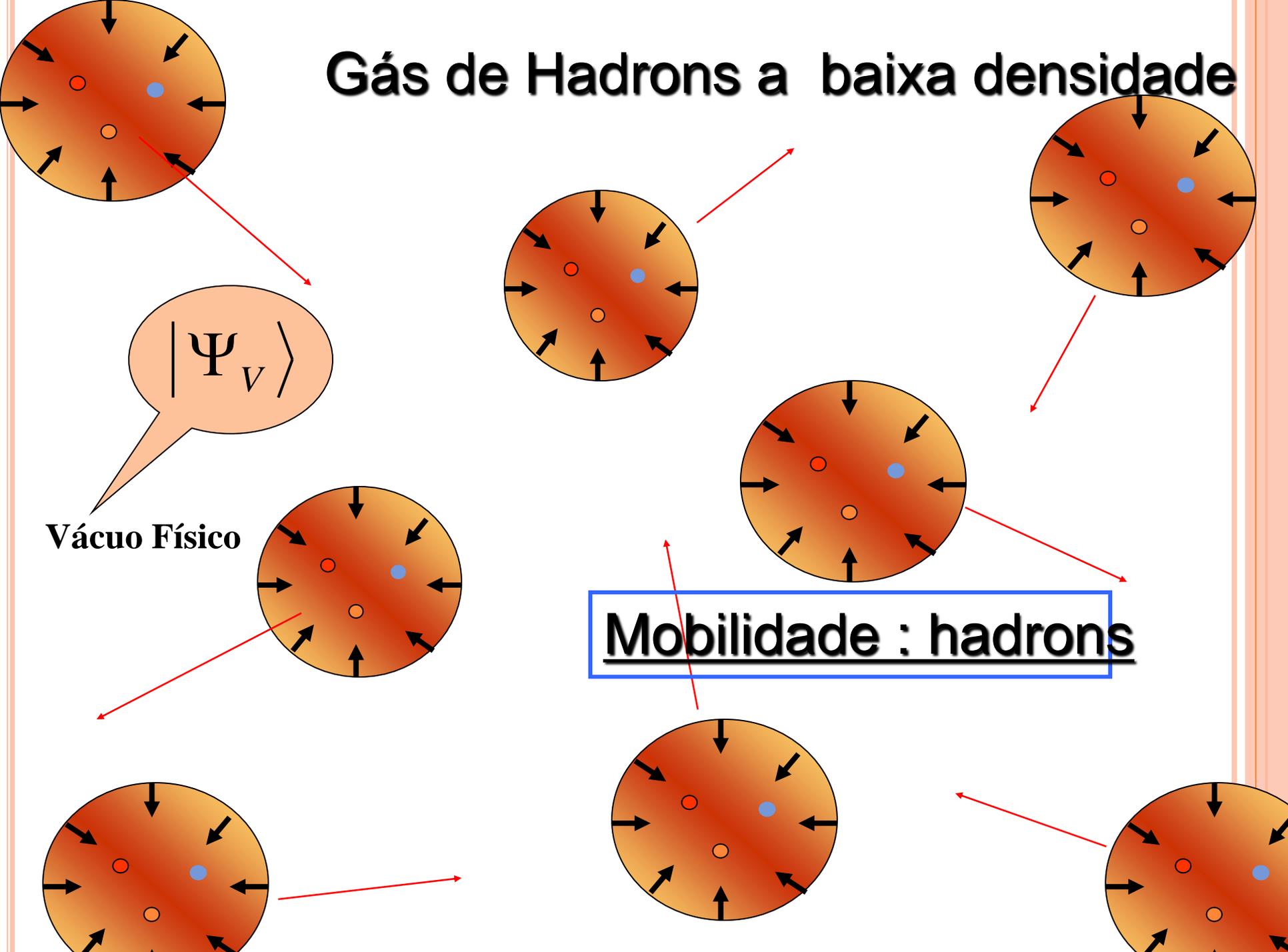
Lift handle to accelerate the stream



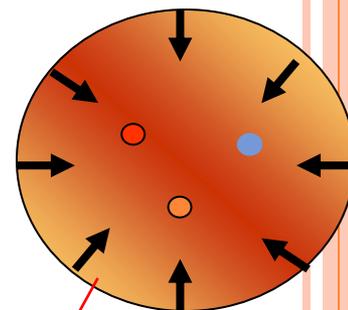
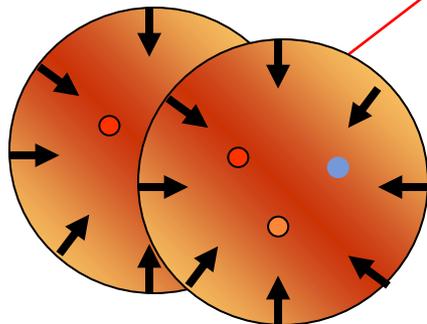
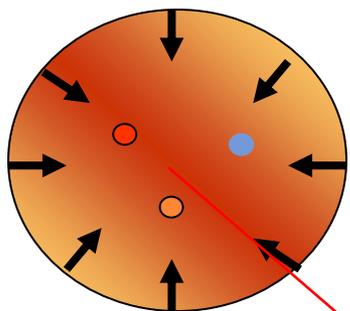
Gás de Hadrons a baixa densidade

$|\Psi_v\rangle$
Vácuo Físico

Mobilidade : hadrons

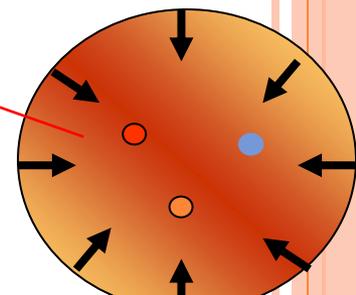
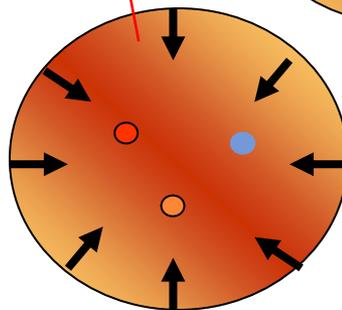
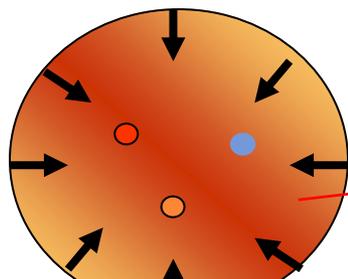
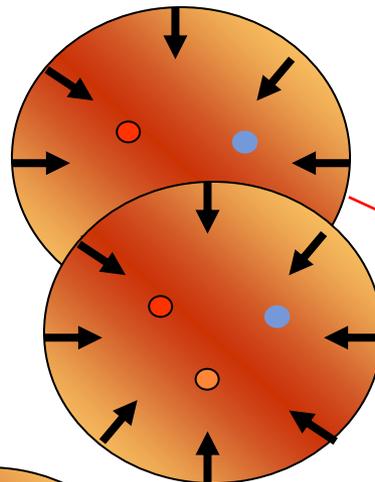
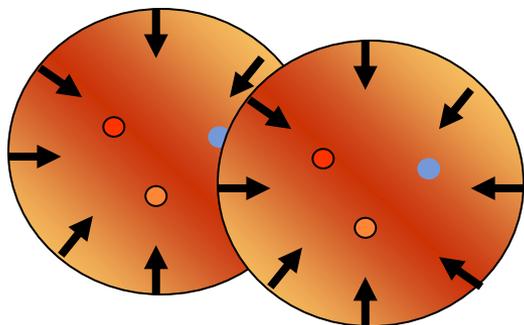


Gás de Hadrons a média densidade

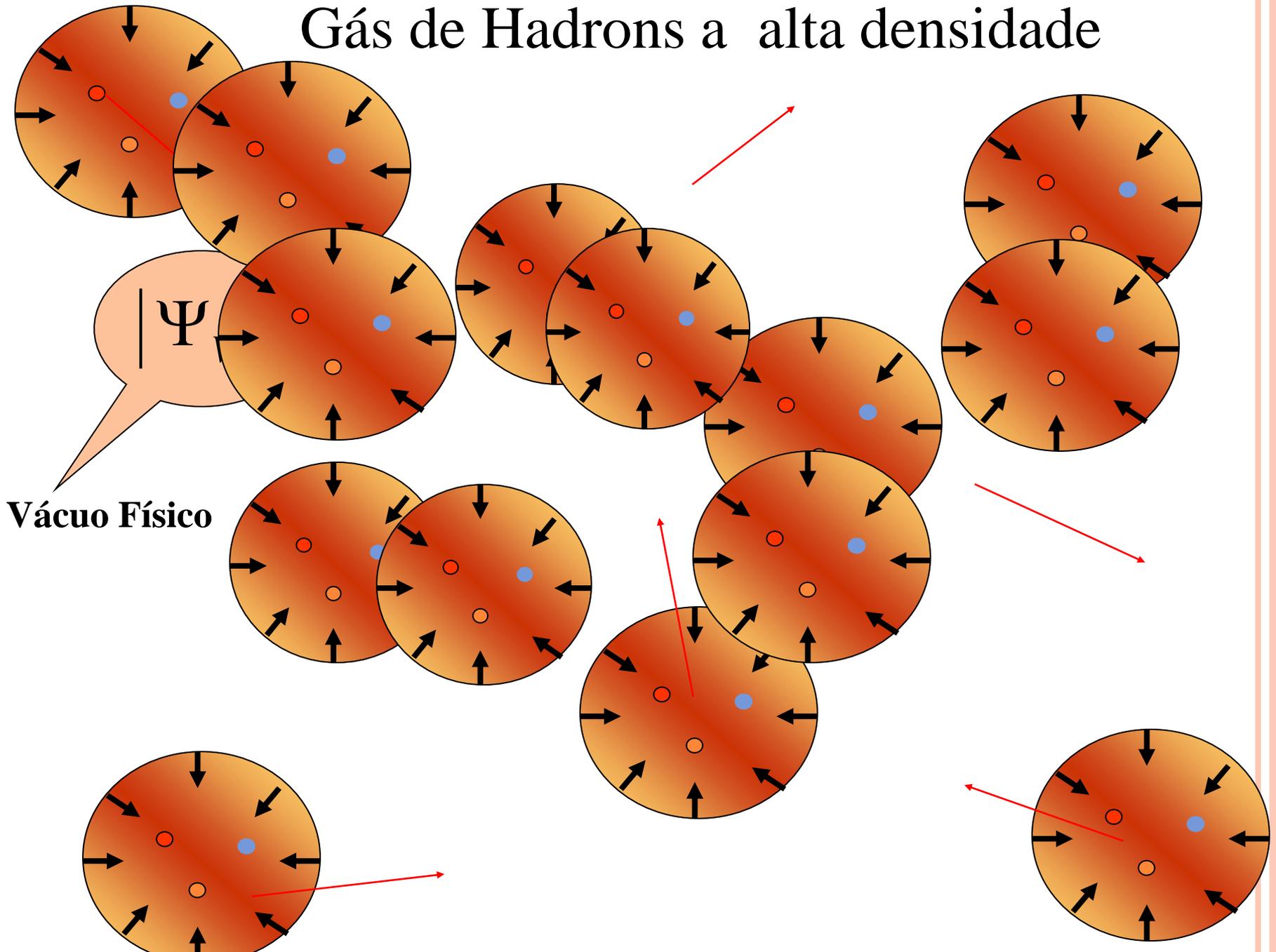


$$|\Psi_v\rangle$$

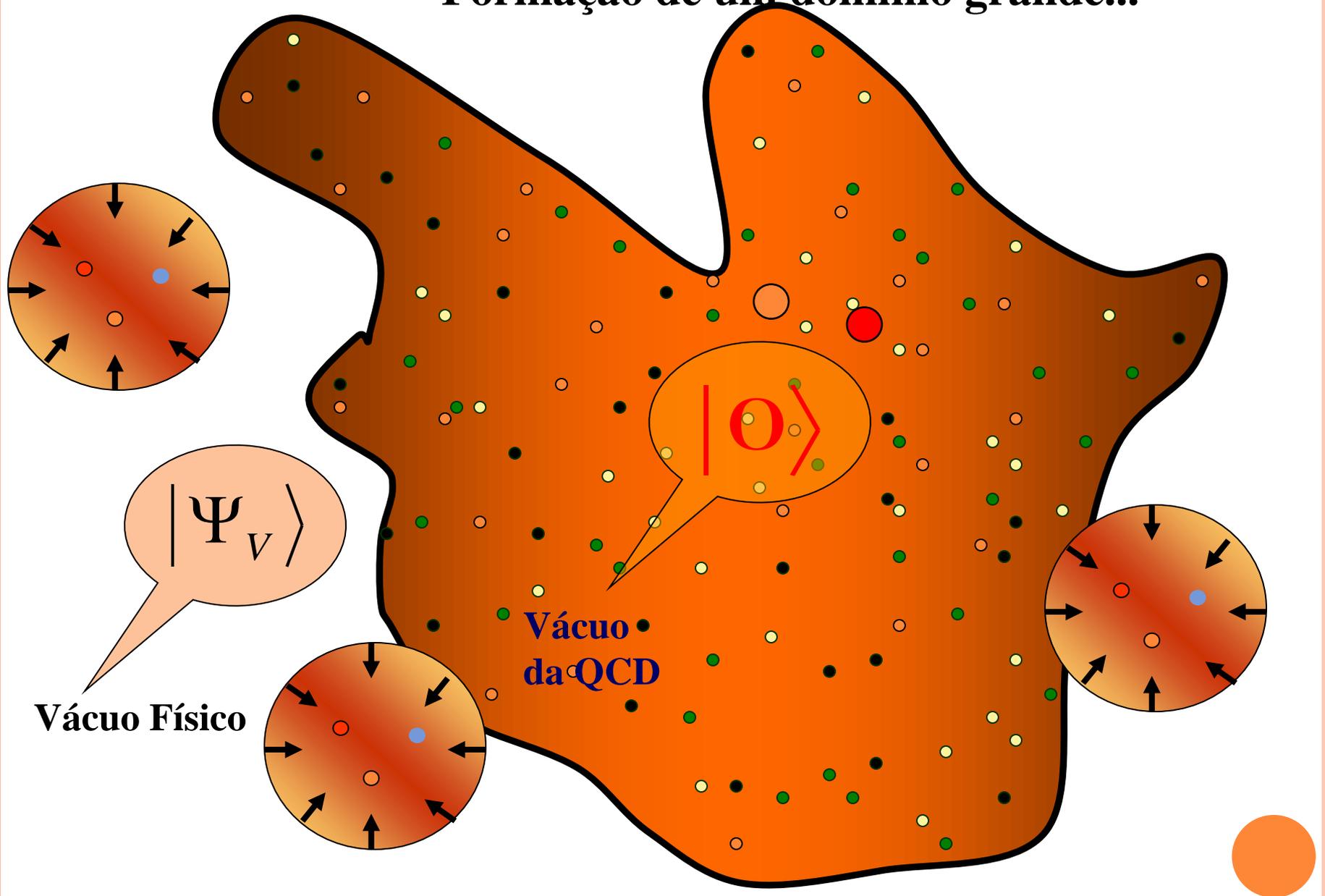
Vácuo Físico



Gás de Hadrons a alta densidade

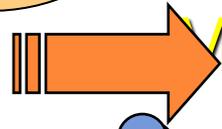


Formação de um domínio grande...



A altíssimas temperatura
e densidade

$|0\rangle$



Mobilidade em termos de quarks e gluons

Vácuo
da QCD

Plasma de Quarks e Gluons

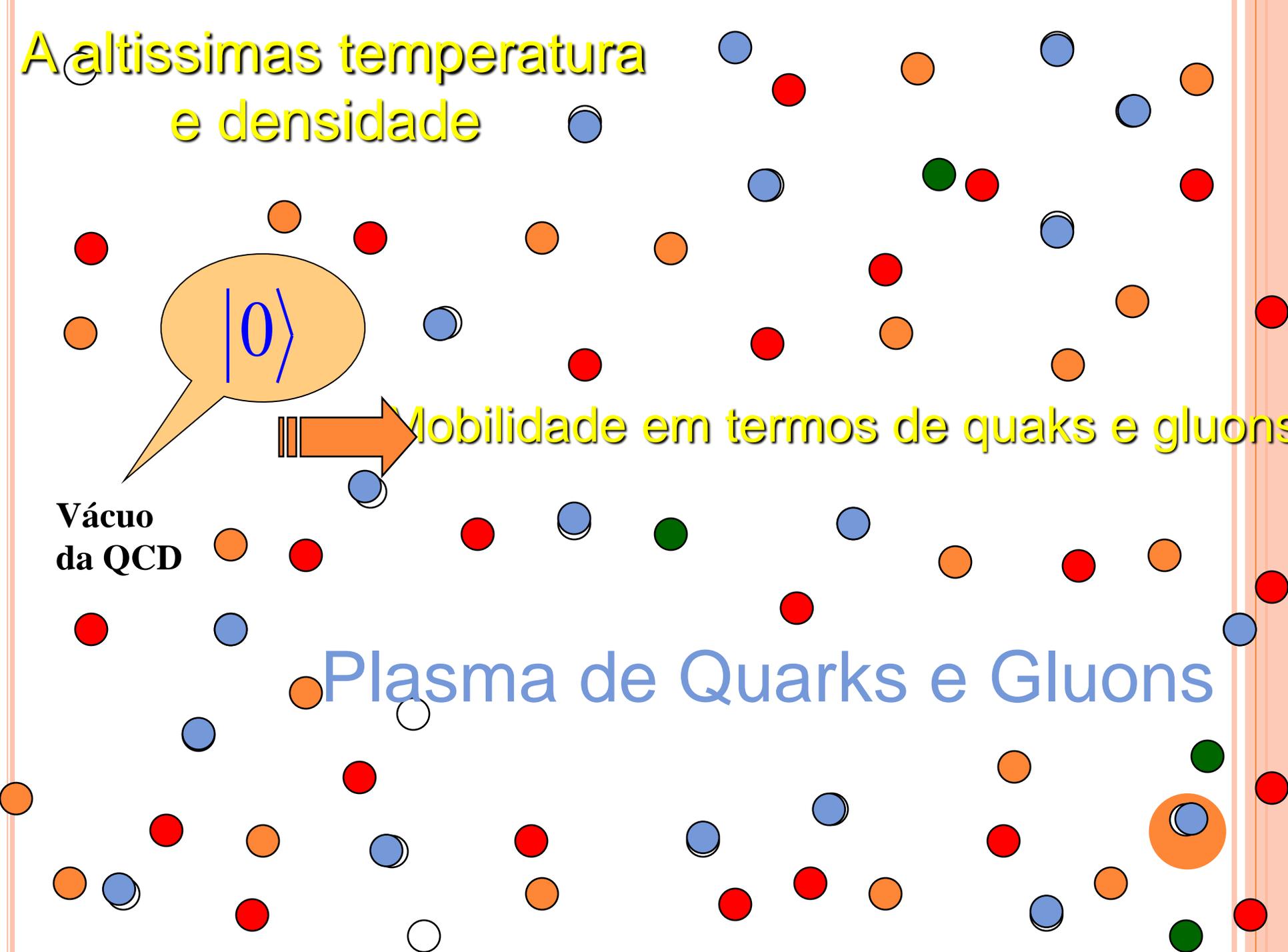
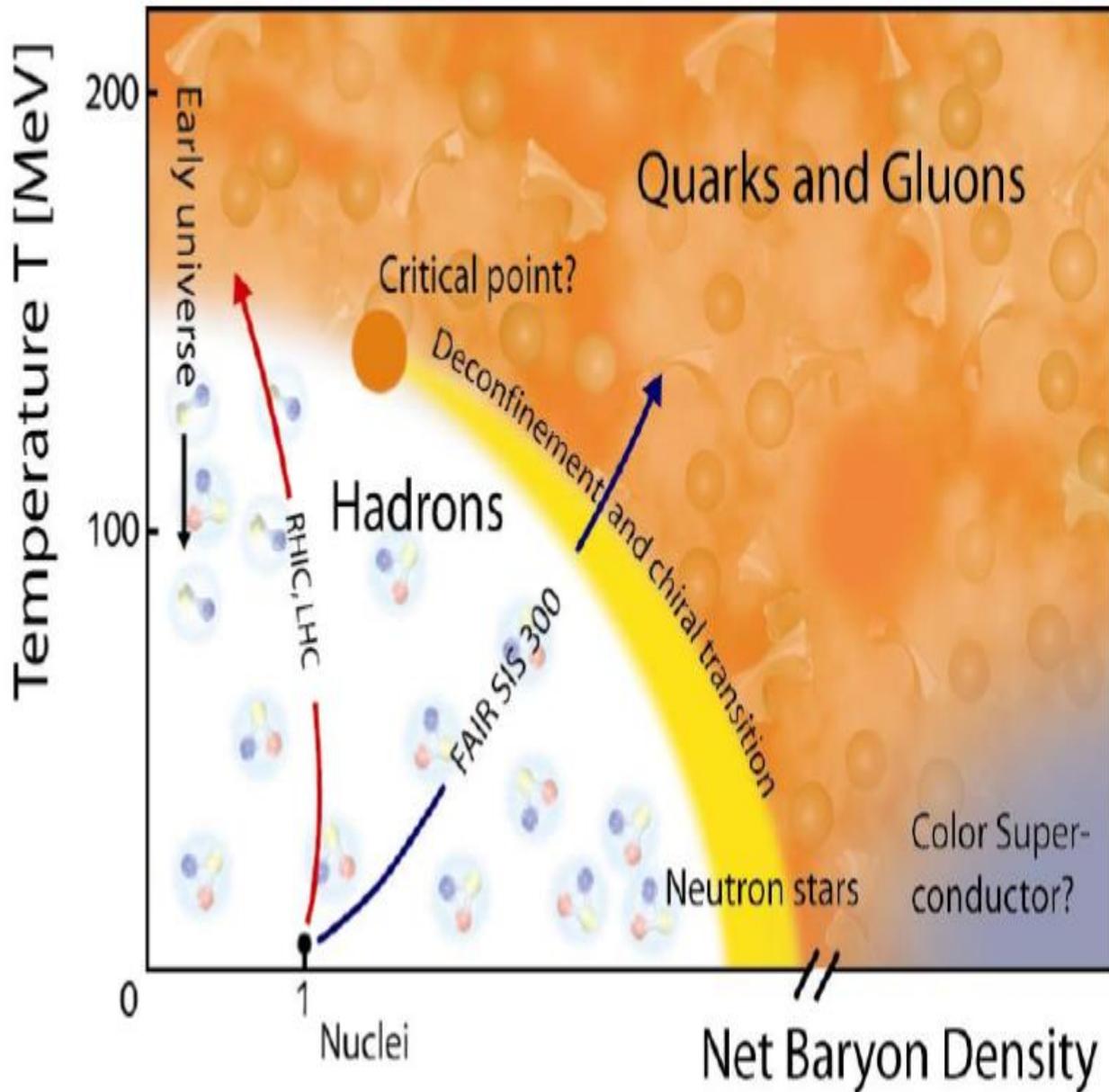
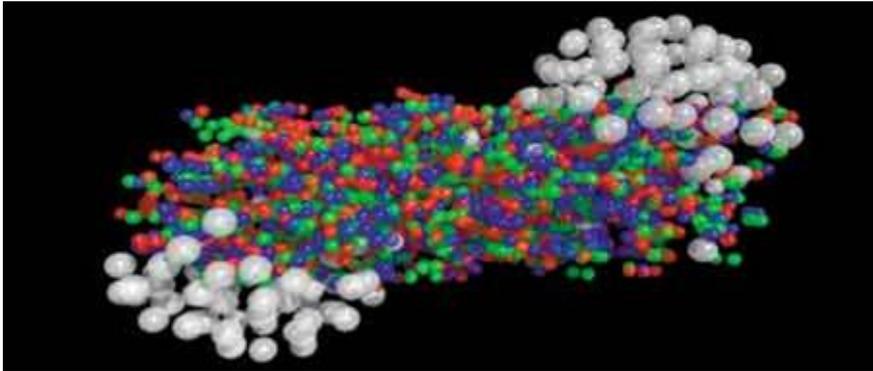


Diagrama de fase da matéria QCD



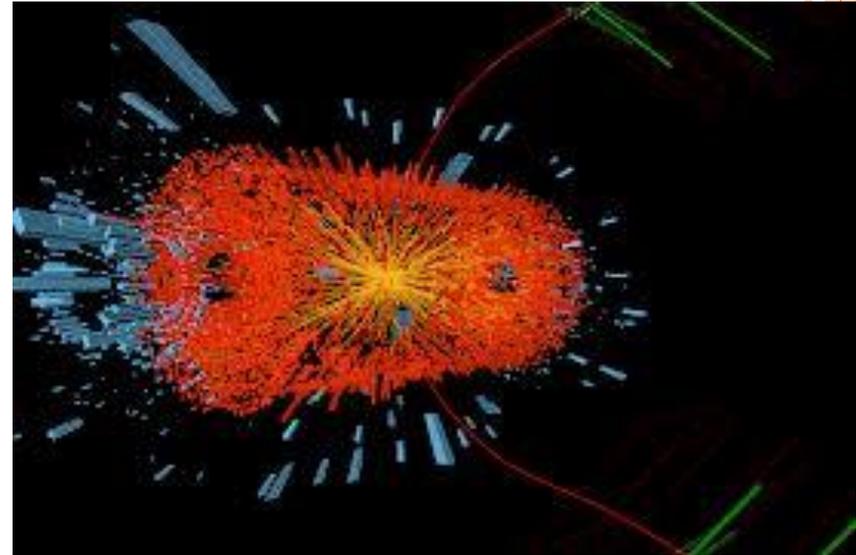
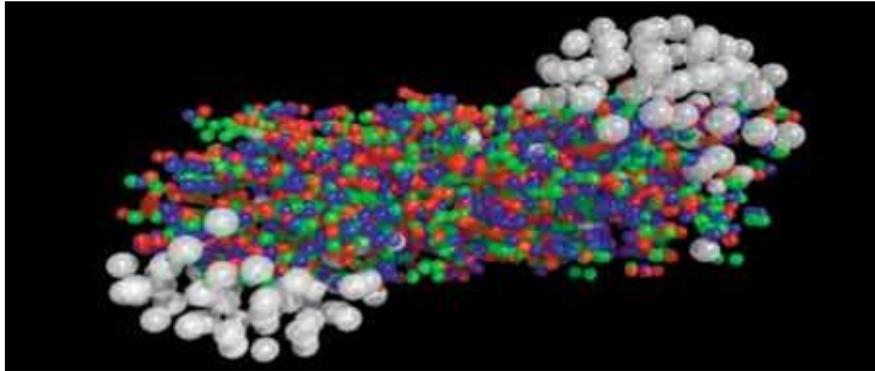
COMO OBSERVAR?

COLLIÇÃO VIOLENTA CRIA UMA BOLA DE FOGO...



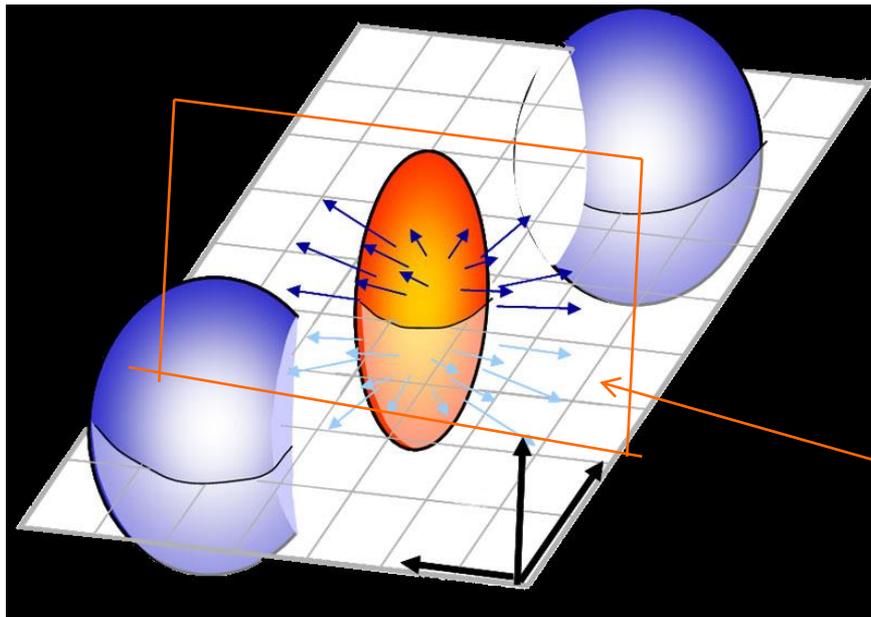
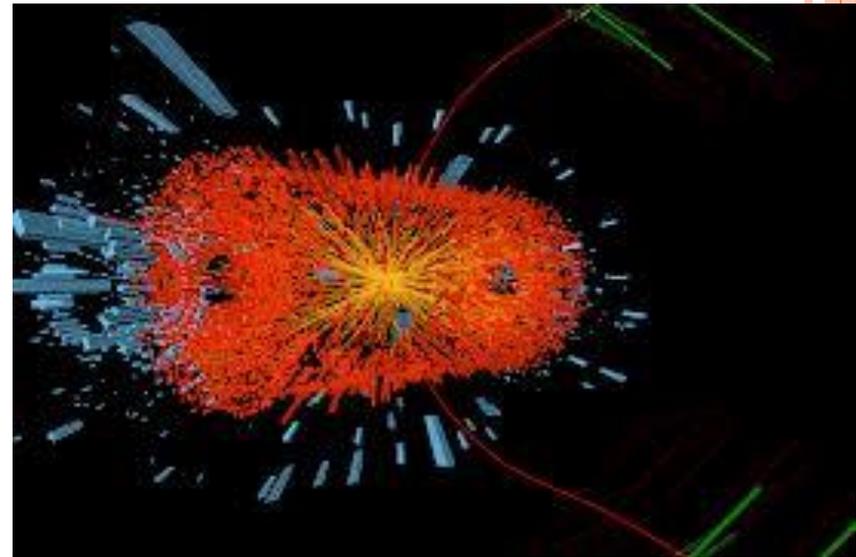
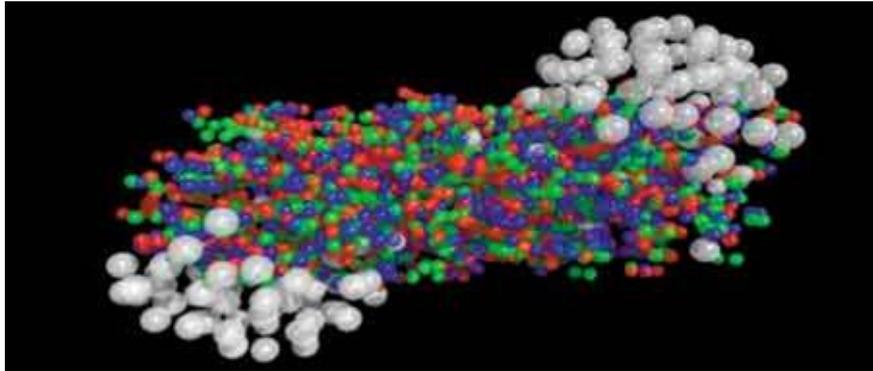
COMO OBSERVAR?

COLLIÇÃO VIOLENTA CRIA UMA BOLA DE FOGO...



COMO OBSERVAR?

COLLIÇÃO VIOLENTA CRIA UMA BOLA DE FOGO...



Corte Transversal

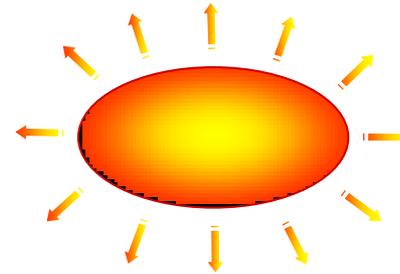
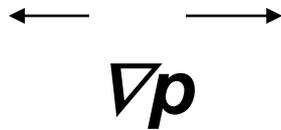
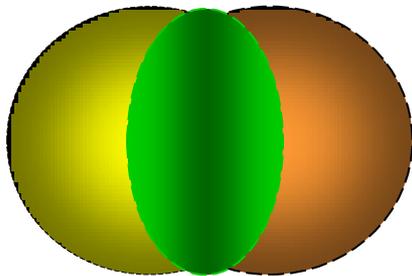


Parâmetro de anisotropia v_2

Anisotropia no espaço



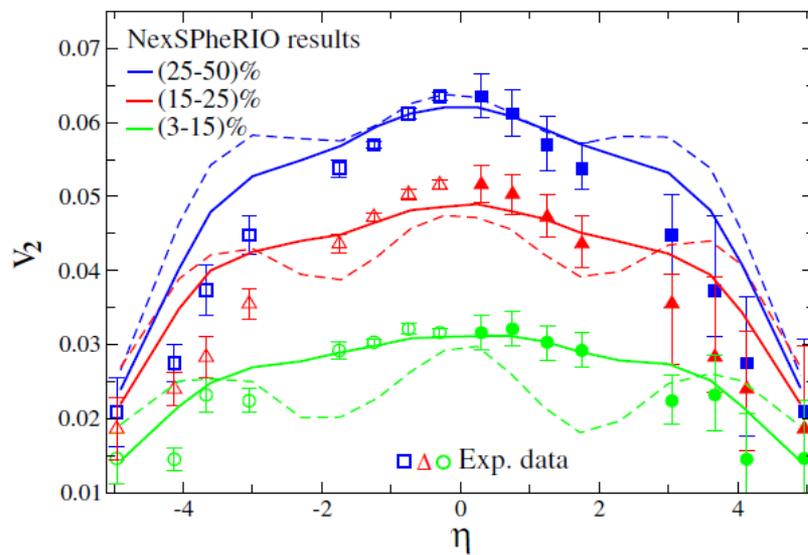
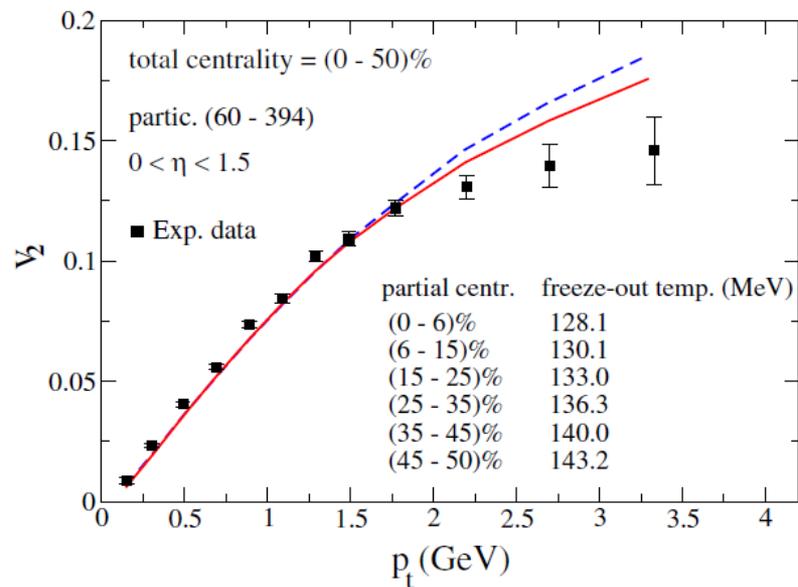
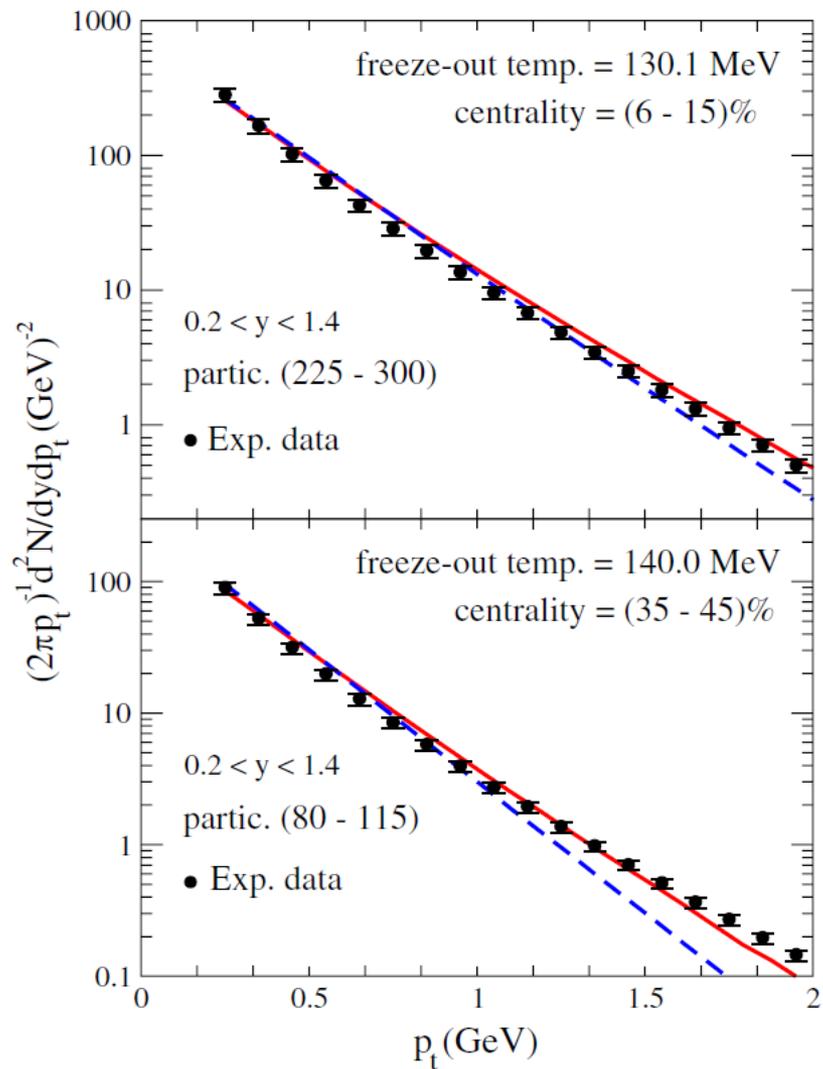
anisotropia em momentos



$$\varepsilon = \frac{\langle y^2 - x^2 \rangle}{\langle y^2 + x^2 \rangle}$$

$$v_2 = \langle \cos 2\varphi \rangle, \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$





O sucesso da descrição hidrodinâmica (quase ideal) das colisões de íons pesados relativísticos gerou uma grande expectativa:

- Determinar as propriedades da matéria criada (EoS, Transport coefficients)
- Comparação com Lattice QCD
- Determinação do Estado Inicial da matéria formada logo após a colisão nuclear.
- Chave para entender a dinâmica da QCD ...



Quando um teórico cozinha
Seu modelo,..



Quando um teórico cozinha
Seu modelo,..



As vezes o modelo pode
ser “lambido”....



Você quer seu com baba, ou sem?



As vezes o modelo pode
ser “lambido”



Você quer seu com baba, ou sem?
Brincadeira, Todos lambidos certinho

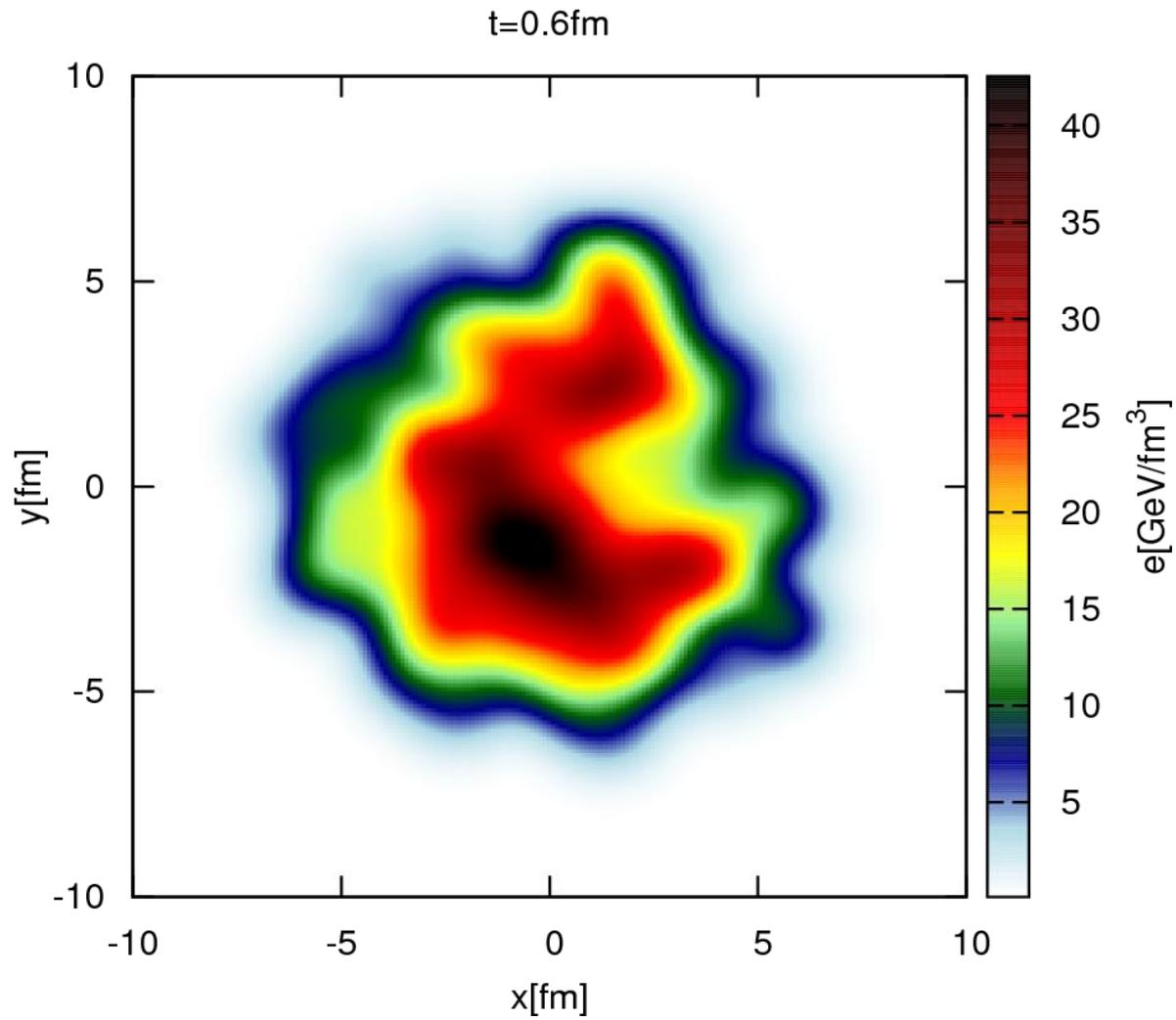
...



ESTRUTURA DA HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA



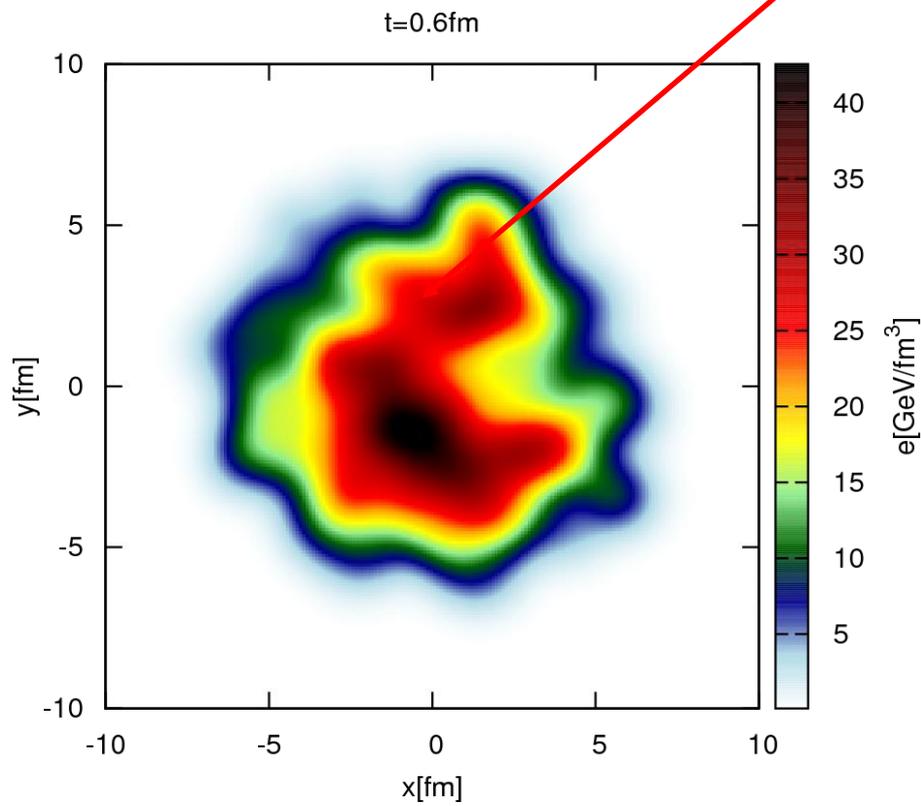
ESTRUTURA DA HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA



ESTRUTURA DA HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA

$$\nabla_x = (t, \vec{r}),$$

$$\exists T^{\mu\nu}(x), n^\mu(x)$$



ESTRUTURA DA HIDRODINAMICA RELATIVISTA

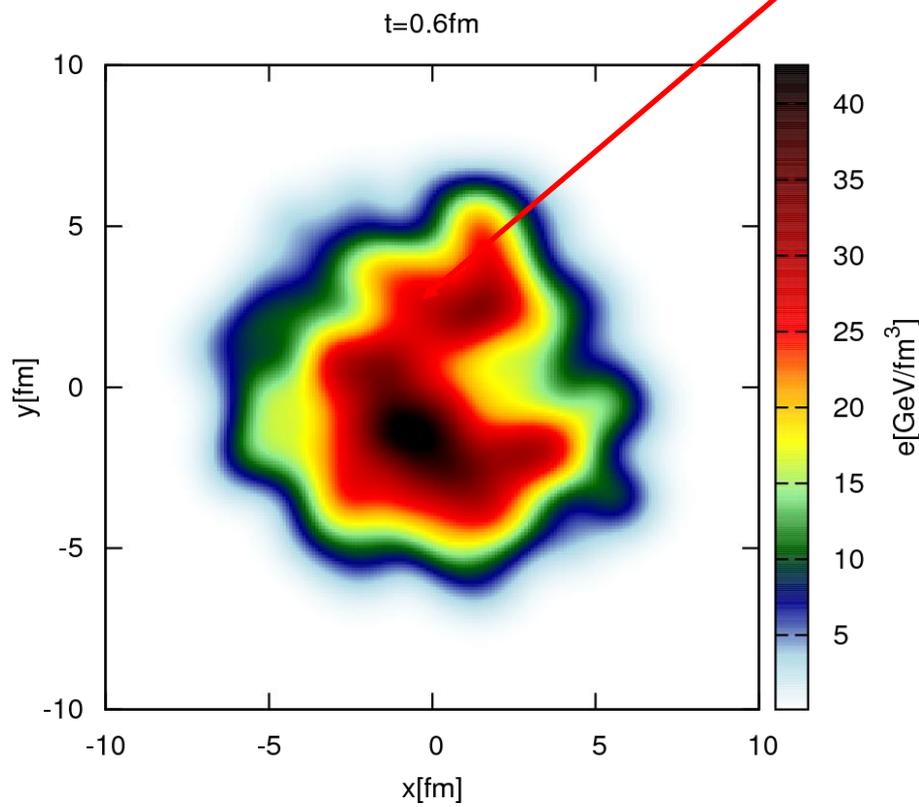
$$\forall x = (t, \vec{r}),$$

$$\exists T^{\mu\nu}(x), n^{\mu}(x)$$

com

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu}(x) = 0,$$

$$\partial_{\mu} n^{\mu}(x) = 0.$$



ESTRUTURA DA HIDRODINAMICA RELATIVISTA

14 incognitas

$$\nabla x = (t, \vec{r}),$$

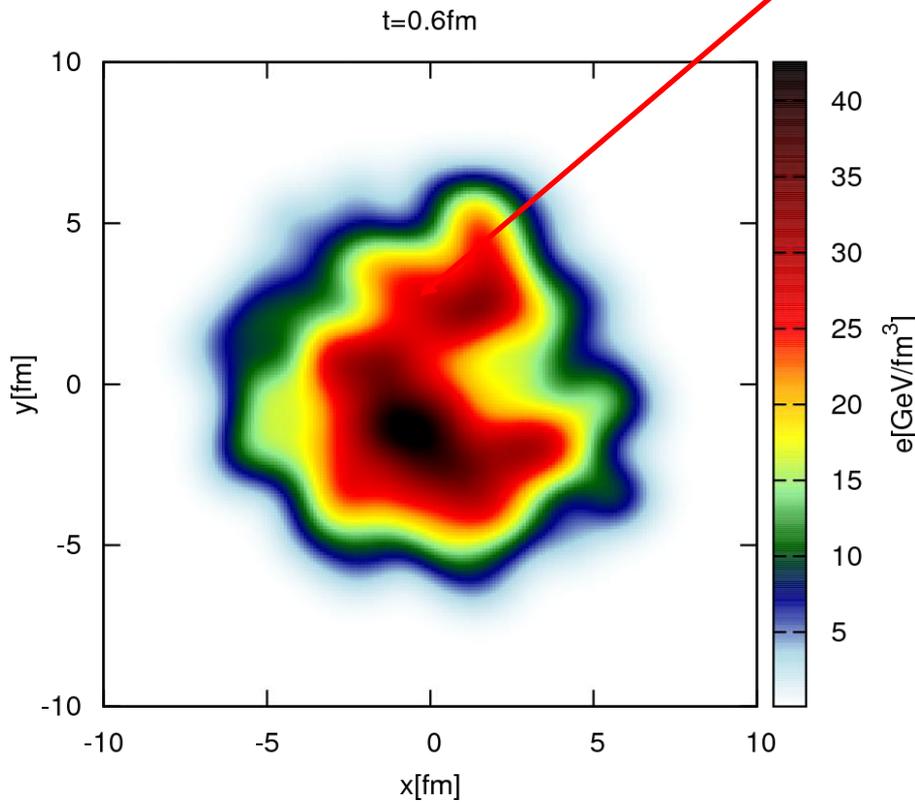
$$\exists T^{\mu\nu}(x), n^{\mu}(x)$$

com

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu}(x) = 0,$$

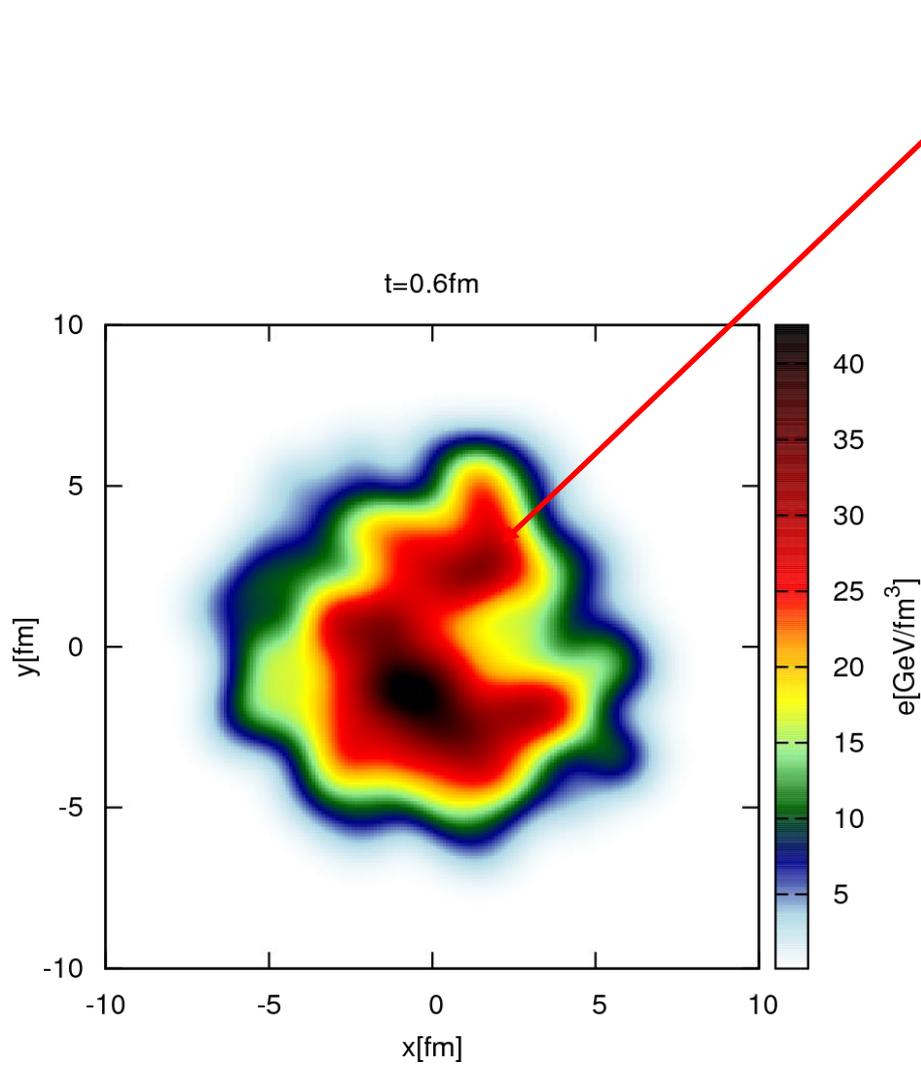
$$\partial_{\mu} n^{\mu}(x) = 0.$$

5 equações



ESTRUTURA DA HIDRODINAMICA RELATIVISTA

Sistema Repouso Local (Landau)



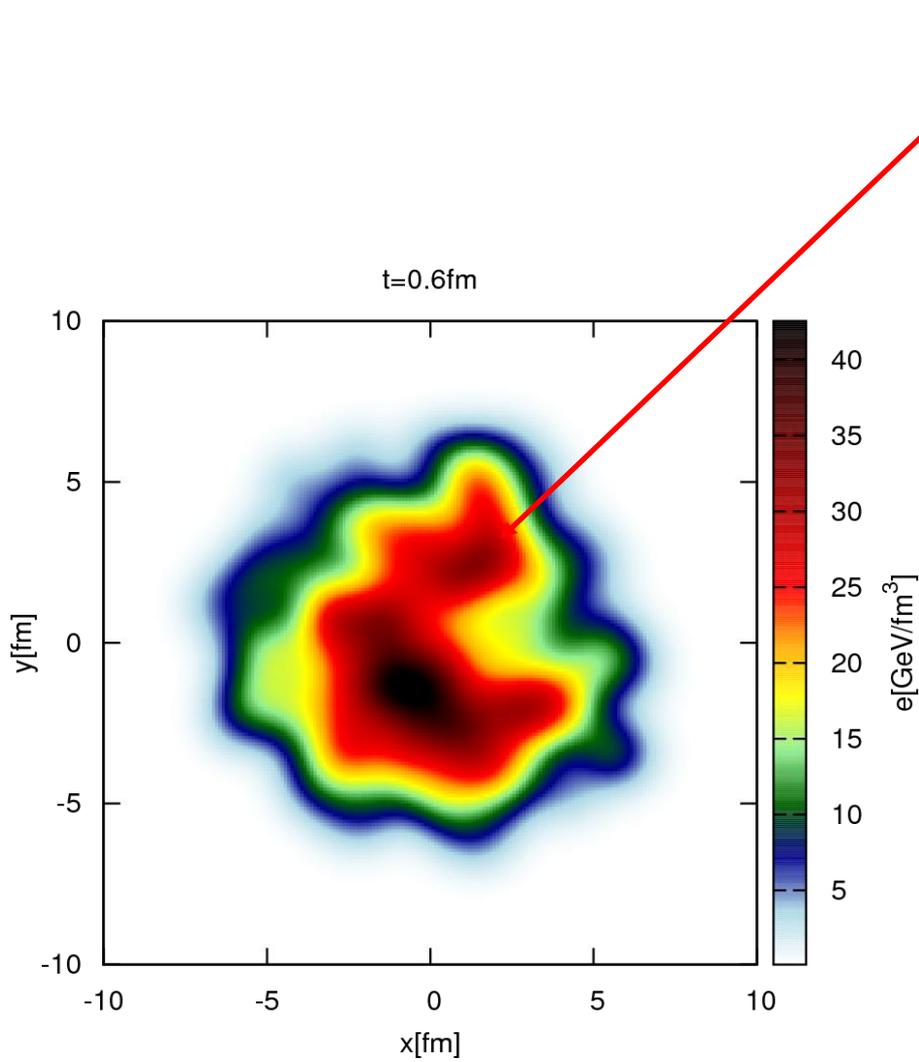
$\nabla_{\mu} x,$

$$T^{\mu\nu}(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$



ESTRUTURA DA HIDRODINAMICA RELATIVISTA

Sistema Repouso Local (Landau)



∇_x

$$T^{\mu\nu}(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

e

$$n^\mu(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} n \\ \vec{j} \\ \text{Diff} \end{pmatrix}$$

ESTRUTURA DA HIDRODINAMICA RELATIVISTA

Sistema de Repouso Local (Landau)

Condições adicionais:

- T é isotrópico
- Não ha difusão

$$\vec{j}_{Diff} = 0 \quad T^{\mu\nu}(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

e

$$n^\mu(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} n \\ \vec{j}_{Diff} \end{pmatrix}$$

ESTRUTURA DA HIDRODINAMICA RELATIVISTA

Sistema Repouso Local (Landau)

Condições adicionais:

- T é isotrópico
- Não ha difusão

$$\vec{j}_{Diff} = 0 \quad T^{\mu\nu}(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

e

$$n^\mu(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} n \\ \vec{j}_{Diff} \end{pmatrix}$$

14-5

ESTRUTURA DA HIDRODINAMICA RELATIVISTIA

Sistema Repouso Local (Landau)

$\nabla_x,$

Condições adicionais:

- T é isotrópico
- Não ha difusão

$$\vec{j}_{Diff} = 0 \quad T^{\mu\nu}(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

e

$$n^\mu(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} n \\ \vec{j}_{Diff} \end{pmatrix}$$

14-5 -3



ESTRUTURA DA HIDRODINAMICA RELATIVISTA

Sistema Repouso Local (Landau)

$\nabla_x,$

Condições adicionais:

- T é isotrópico
- Não ha difusão

$\vec{j}_{Diff} = 0$

$$T^{\mu\nu}(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

e

$$n^\mu(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} n \\ \vec{j}_{Diff} \end{pmatrix}$$

14-5 -3 -1 = 5

- ε é fortemente correlacionado com n .

ESTRUTURA DA HIDRODINAMICA RELATIVISTA

Caso fluido ideal

Condições adicionais:

- T é isotrópico
- Não ha difusão

$$\nabla_{\mu} x, \quad \vec{j}_{Diff} = 0 \quad T^{\mu\nu}(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

14-5-3-1 = 5 = No. de Eqs.!!

- ε é fortemente correlacionado com n .

$$e \quad n^{\mu}(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} n \\ \vec{j}_{Diff} \end{pmatrix}$$

ESTRUTURA DA HIDRODINAMICA RELATIVISTA

Equilíbrio térmico local realiza essas..

Condições adicionais:

- T é isotrópico
- Não ha difusão

$$\vec{j}_{Diff} = 0$$

$$14 - 5 - 3 - 1 = 5$$

- ε é fortemente correlacionado com n .

$\forall x,$

$$T^{\mu\nu}(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

and

$$n^\mu(x) \xrightarrow{\Lambda(u)} \begin{pmatrix} n \\ \vec{j}_{Diff} \end{pmatrix}$$

HIDRODYNÂMICA RELATIVÍSTICA COMO UMA TEORIA DE CAMPO LOCAL CLÁSSICO COVARIANTE...

- Comunmente, **Equilíbrio Termodinâmico Local** é considerado como uma condição necessária.



HIDRODYNÂMICA RELATIVÍSTICA COMO UMA TEORIA DE CAMPO LOCAL CLÁSSICO COVARIANTE...

- Comunmente, **Equilíbrio Termodinâmico Local** é considerado como uma condição necessária.
- Entretanto essa é não trivial para colisões..., até contraditória, se realmente local (**bem que “lambido”**).



HIDRODYNÂMICA RELATIVÍSTICA COMO UMA TEORIA DE CAMPO LOCAL CLÁSSICO COVARIANTE...

- Comunmente, **Equilíbrio Termodinâmico Local** é considerado como uma condição necessária.
- Entretanto essa é não trivial para colisões..., até contraditória, se realmente local (**bem que “lambido”**).

Relativity X Thermodynamics



HIDRODYNÂMICA RELATIVÍSTICA COMO UMA TEORIA DE CAMPO LOCAL CLÁSSICO COVARIANTE...

- Comunmente, **Equilíbrio Termodinâmico Local** é considerado como uma condição necessária.
- Entretanto essa é crucial para colisões..., até contraditória, se realmente **em que** “lambido”).

Relativity



Relativity X Thermodynamics



Relativity **X** Thermodynamics



PARA RECONCILIAR O CONFLITO, TALVEZ SE
PRECISA DE UM OUTRO PONTO DE VISTA....



Relativity X Thermodynamics



PARA RECONHECER
PRECISA-SE UM

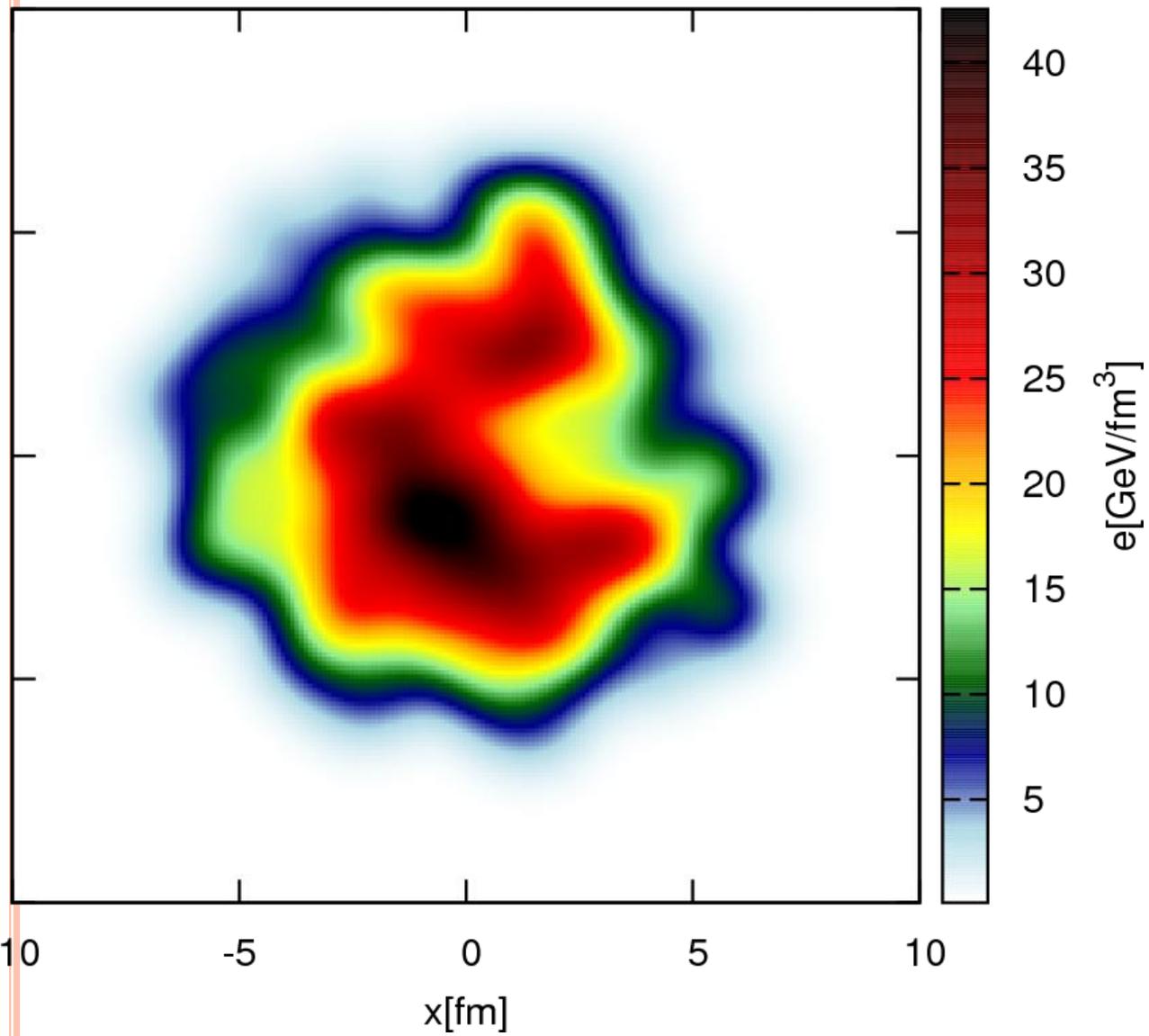
OUTRO, TALVEZ
DE VISTA....



Ou não resolve mesmo.....

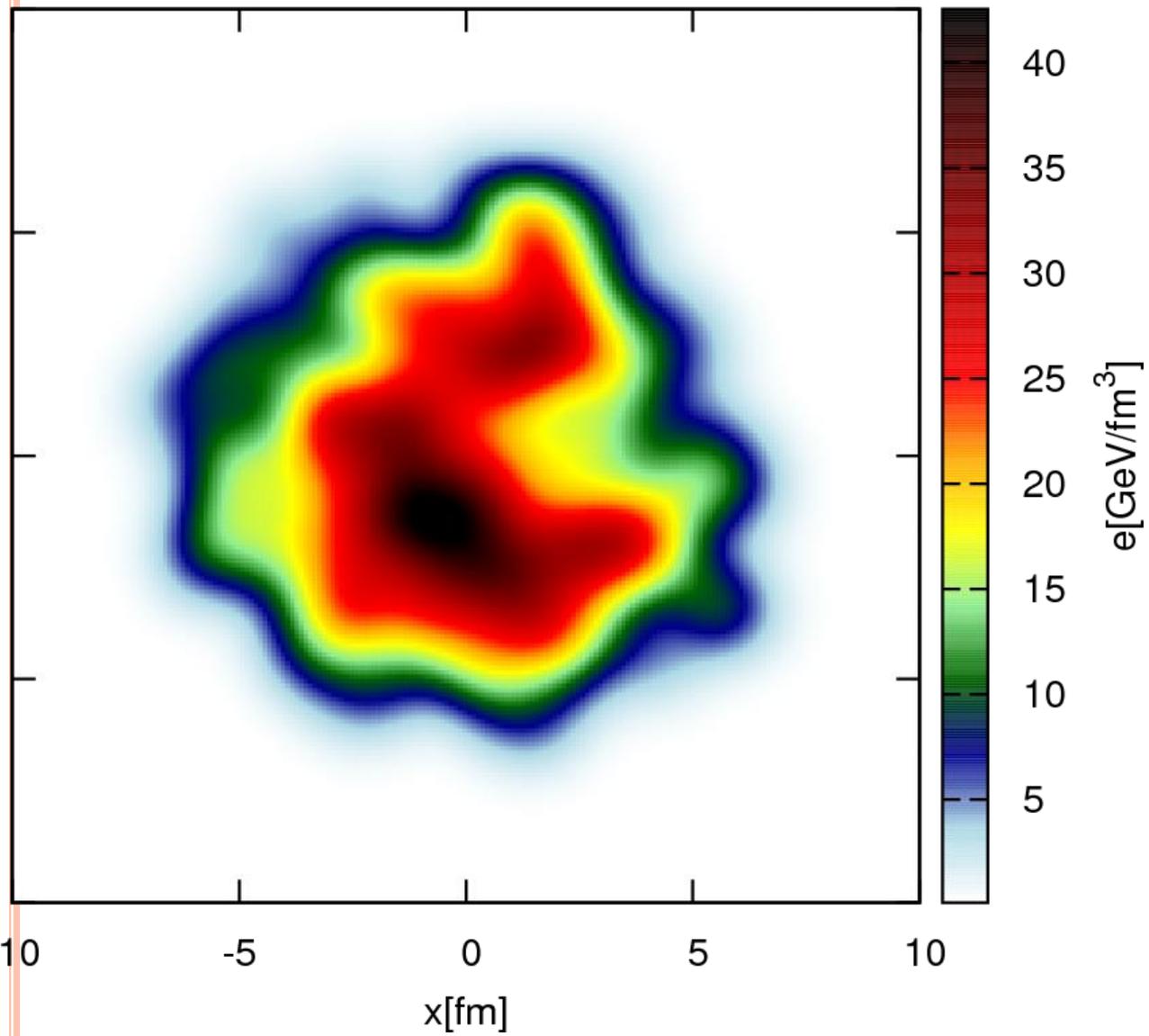
GRANULAÇÃO E RESOLUÇÃO

$t=0.6\text{fm}$



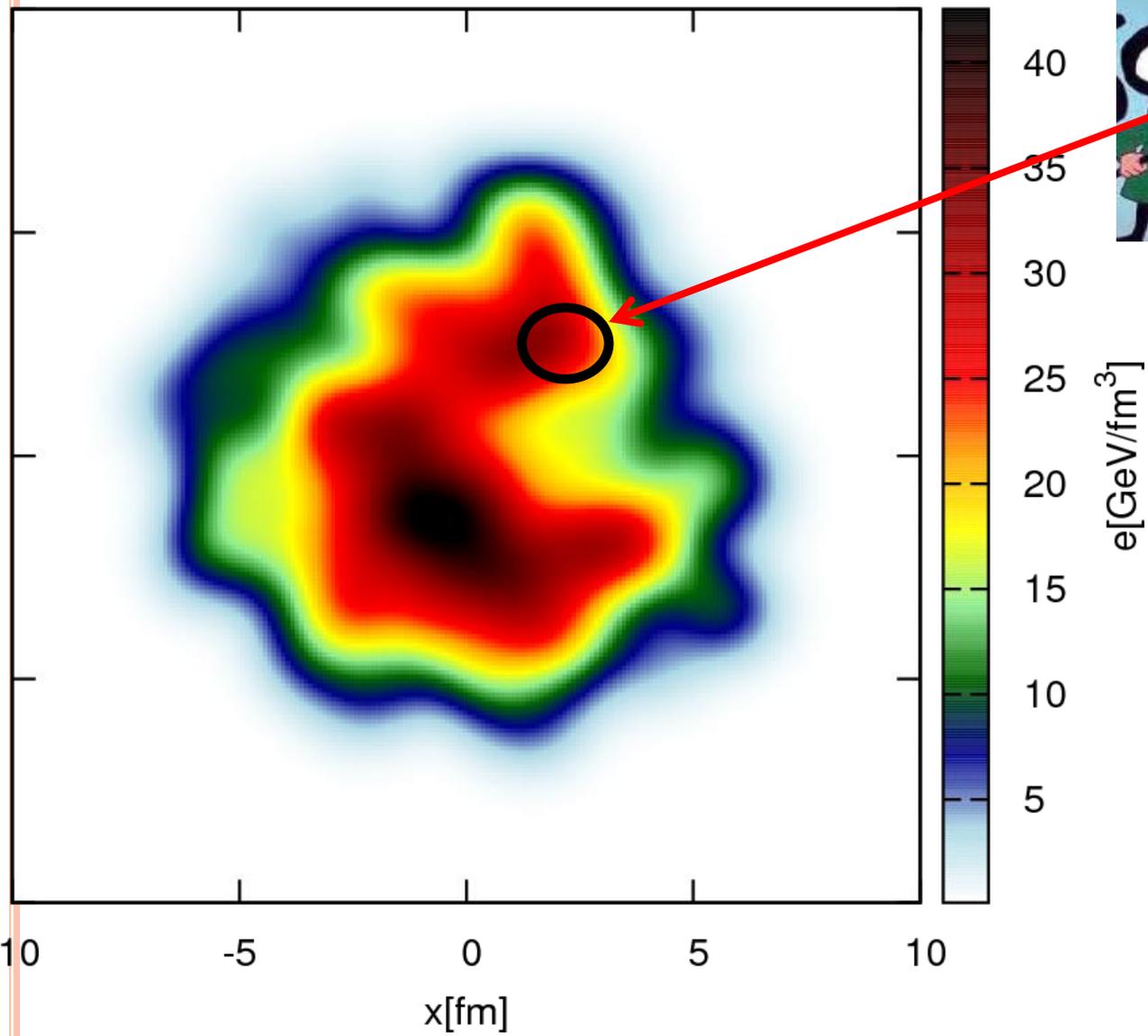
GRANULAÇÃO E RESOLUÇÃO

$t=0.6\text{fm}$



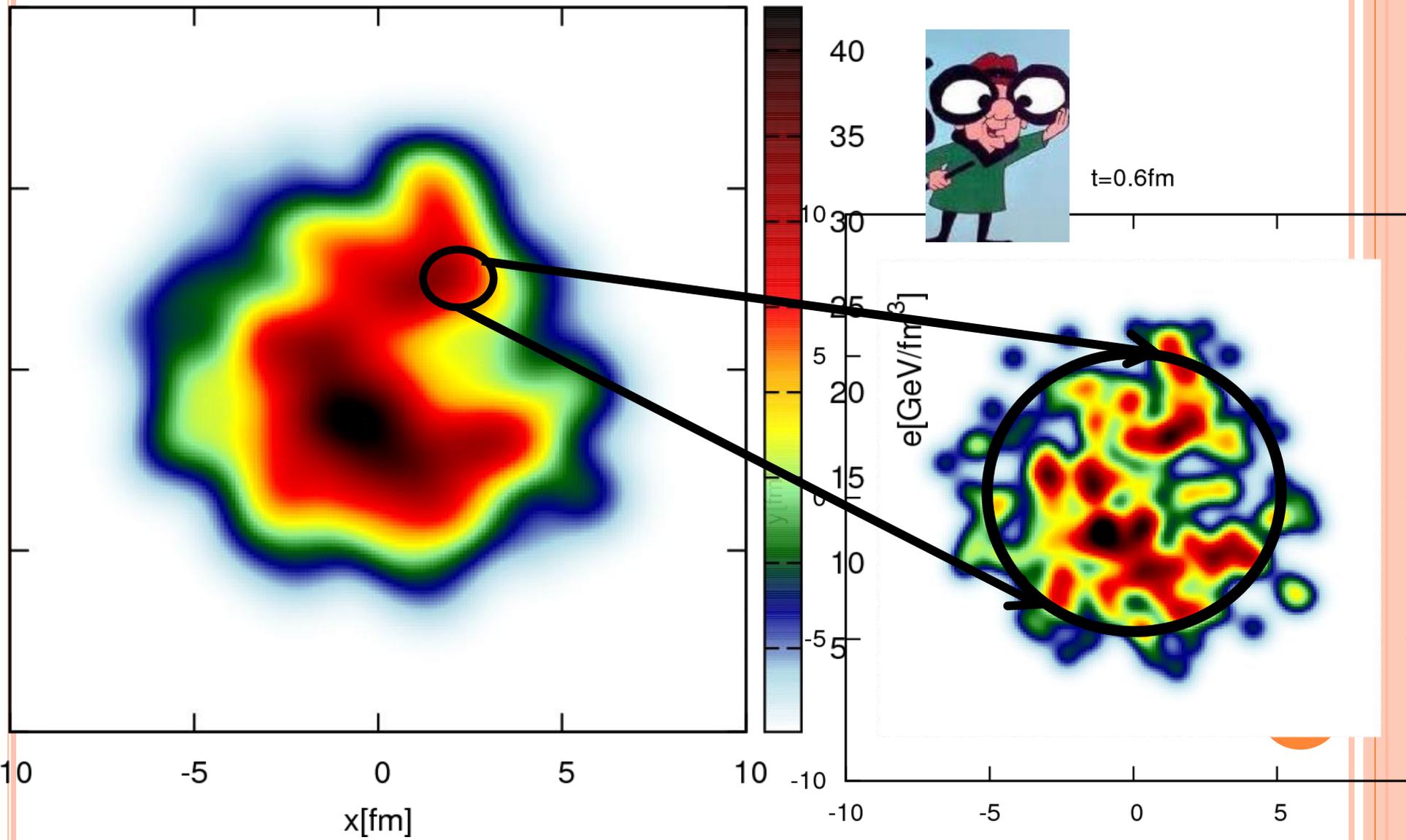
GRANULAÇÃO E RESOLUÇÃO

$t=0.6\text{fm}$



GRANULAÇÃO E RESOLUÇÃO

$t=0.6\text{fm}$



EXEMPLO:

- Densidade da matéria expresso em termos de Coordenada Lagrangiana:

$$n^*(t, \vec{r}) = \int d^3 \vec{R} n_0(\vec{R}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_R(t))$$



EXEMPLO:

- Densidade da matéria expresso em termos de Coordenada Lagrangiana:

$$n^*(t, \vec{r}) = \int d^3 \vec{R} n_0(\vec{R}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_R(t))$$



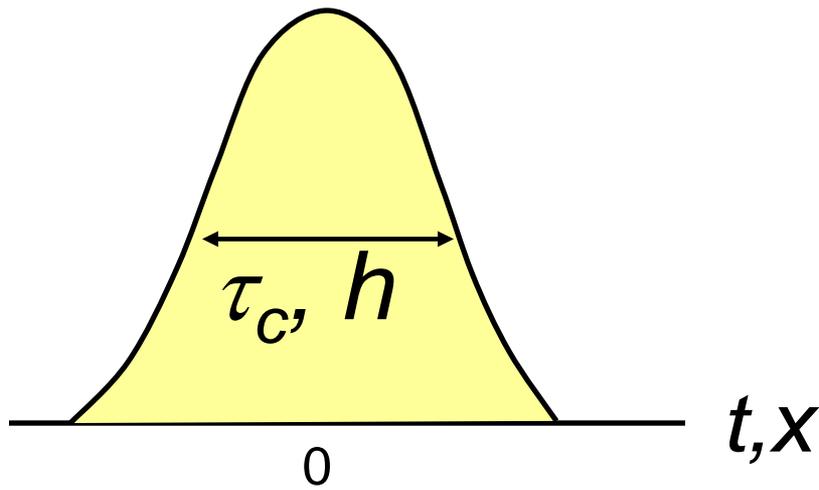
- Se não temos resolução no tempo,

$$n^*(t, \vec{r}) \rightarrow$$

$$\int dt' d^3 \vec{R} n_0(\vec{R}) U_{\tau_c}(t' - t) W_h(\vec{r} - \vec{r}_R(t))$$



$U_{\tau_c}(t), W_h(\mathbf{x}) \leftrightarrow$ smoothing kernel



$$\int U(t) dt = \int W(x) dx = 1$$

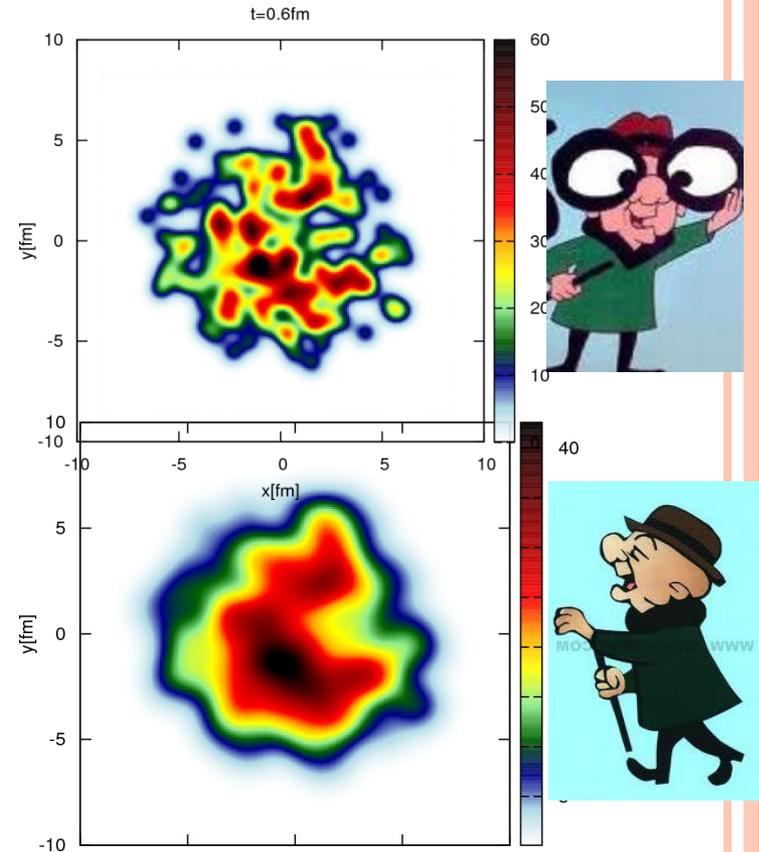


$$n^*(t, \vec{r}) = \int dt' d^3 \vec{R} n_0(\vec{R}) U_{\tau_c} W_h$$

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \int dt' d^3 \vec{R} n_0(\vec{R}) U_{\tau_c} W_h \frac{d\vec{r}_R}{dt'}$$

$$U_{\tau_c} = U_{\tau_c}(t' - t)$$

$$W_h = W_h(\vec{r} - \vec{r}_R(t'))$$



$$n^*(t, \vec{r}) = \int dt' d^3 \vec{R} n_0(\vec{R}) U_{\tau_c} W_h$$

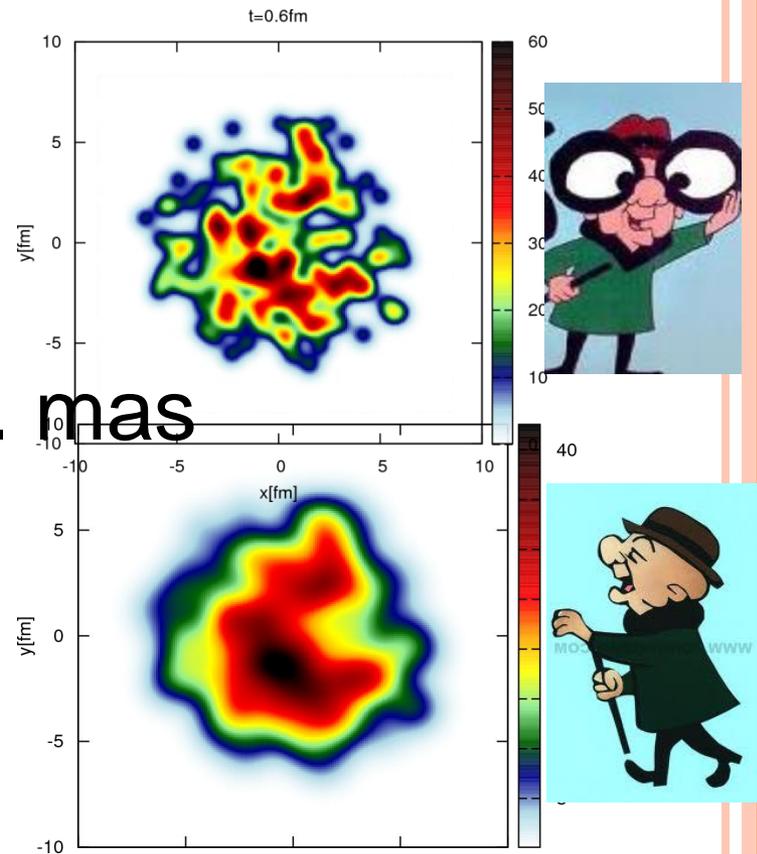
$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \int dt' d^3 \vec{R} n_0(\vec{R}) U_{\tau_c} W_h \frac{d\vec{r}_R}{dt'}$$

$$U_{\tau_c} = U_{\tau_c}(t' - t)$$

$$W_h = W_h(\vec{r} - \vec{r}_R(t'))$$

Não é exatamente local .. mas

$$\partial_t n^*(t, \vec{r}) + \nabla \cdot \vec{j}(t, \vec{r}) = 0$$



$$n^*(t, \vec{r}) = \int dt' d^3 \vec{R} n_0(\vec{R}) U_{\tau_c} W_h$$

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \int dt' d^3 \vec{R} n_0(\vec{R}) U_{\tau_c} W_h \frac{d\vec{r}_R}{dt'}$$

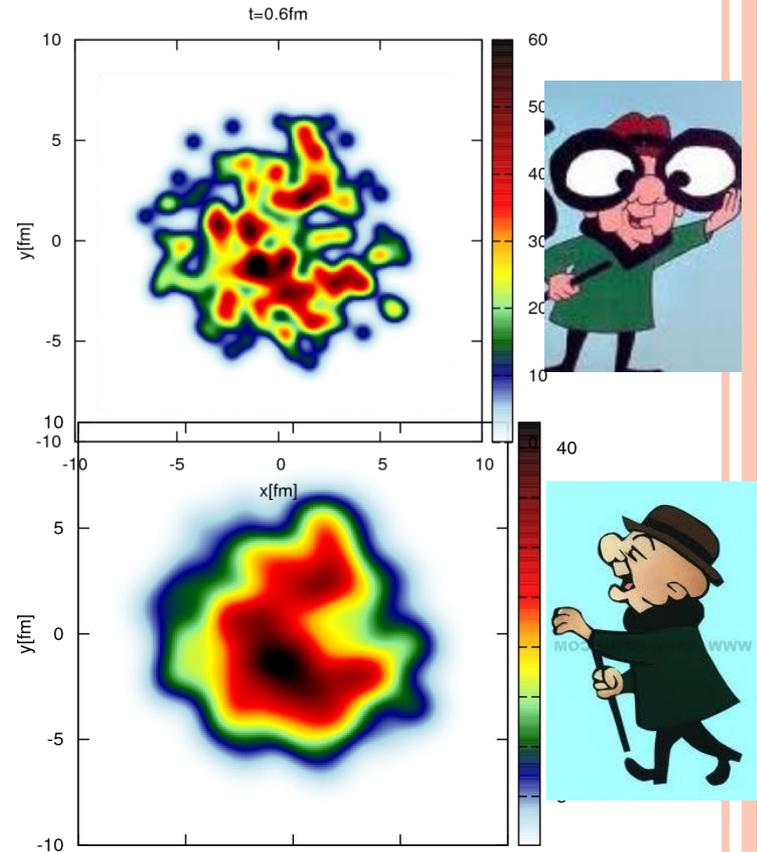
$$U_{\tau_c} = U_{\tau_c}(t' - t)$$

$$W_h = W_h(\vec{r} - \vec{r}_R(t'))$$

Até podemos escrever

$$n^\mu = (n^*, \vec{j}),$$

$$\partial_\mu n^\mu = 0.$$



Podemos também fazer com $T^{\mu\nu}(x)$

$$T^{\mu\nu}(x) = \int dt' d^3\vec{x}' U_{\tau_c} W_h T_M^{\mu\nu}(t, \vec{x}')$$

Define $n(t, \vec{r}) = \sqrt{n_\mu n^\mu}$,

$$u^\mu(t, \vec{r}) = n^\mu / n,$$

$$\varepsilon(t, \vec{r}) = u_\mu u_\nu T^{\mu\nu},$$

Significado físico de ε e n :

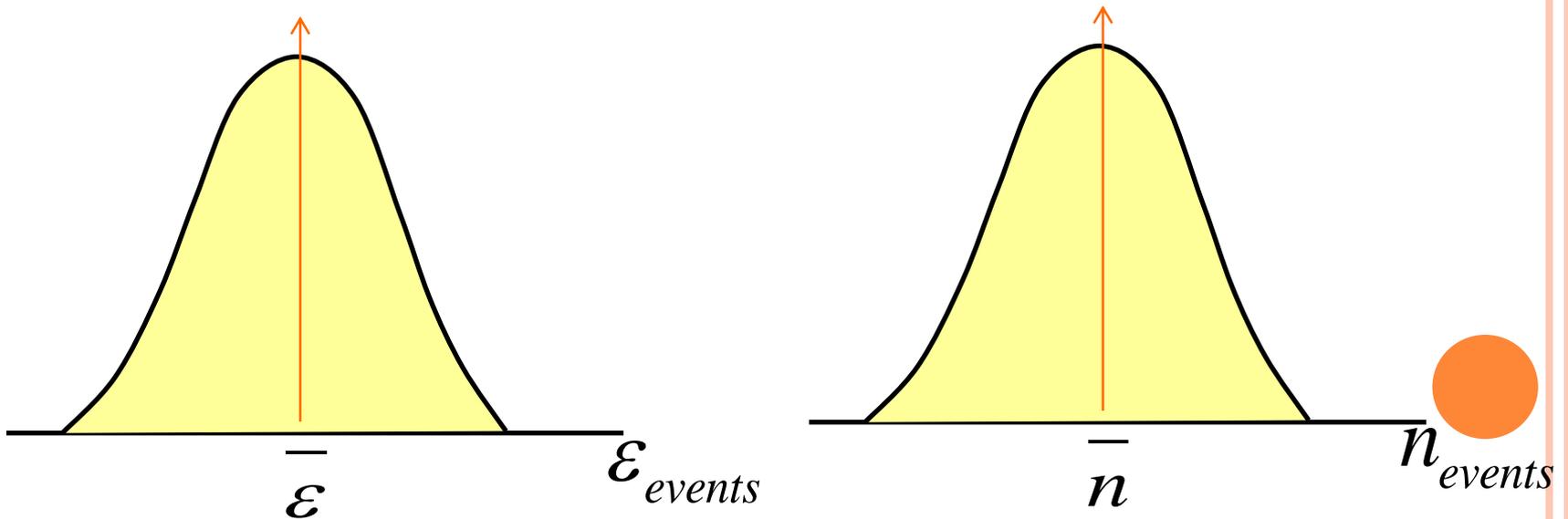
Densidades “próprias” de energia e número de partículas medidas no sistema de referência local.



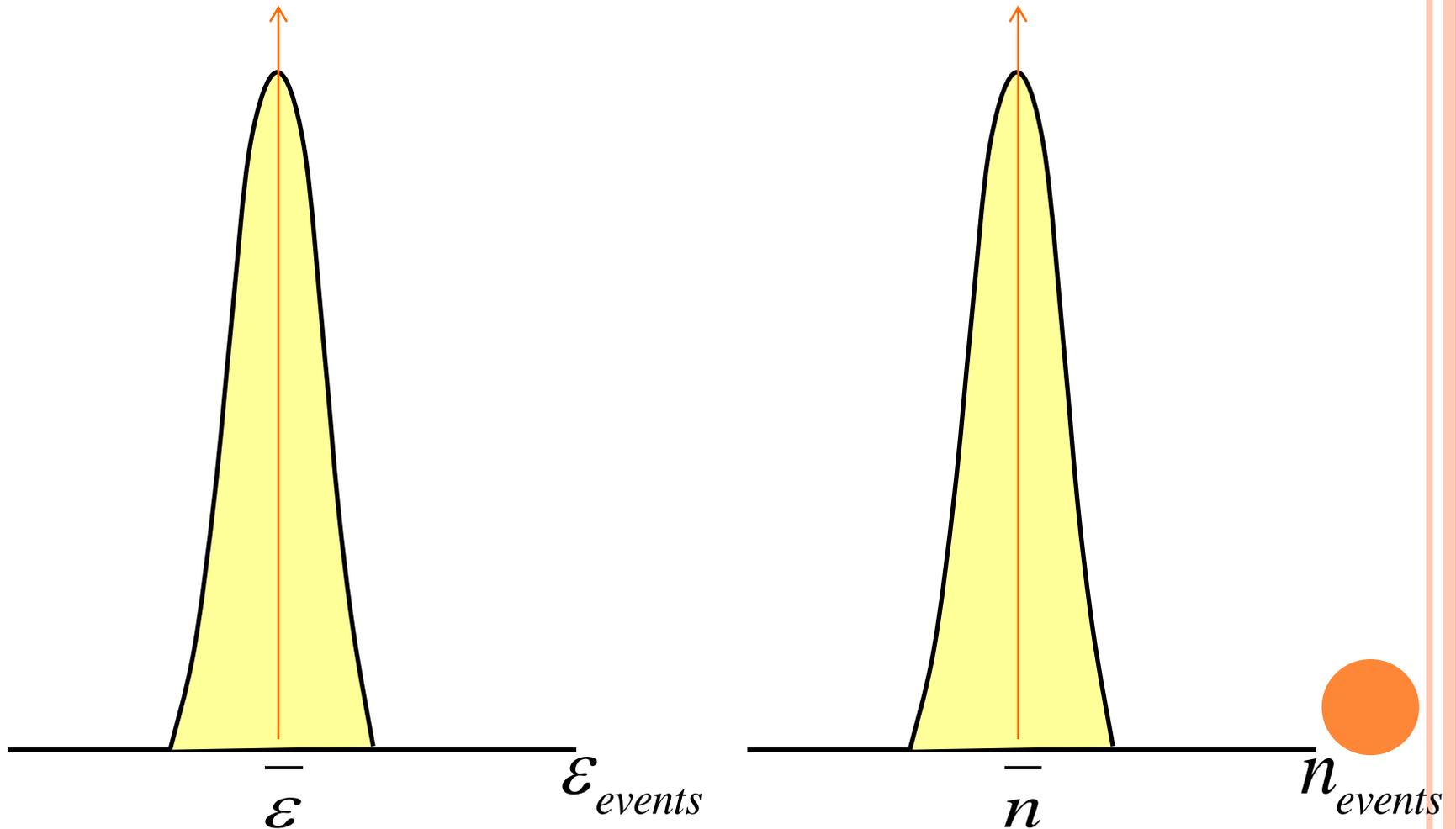
Digamos, Ω , um ensemble dos eventos,

$$\Omega = \left\{ \text{events} \mid n^\mu(t_0, \vec{r}) = n_0^\mu(\vec{r}) \right\}.$$

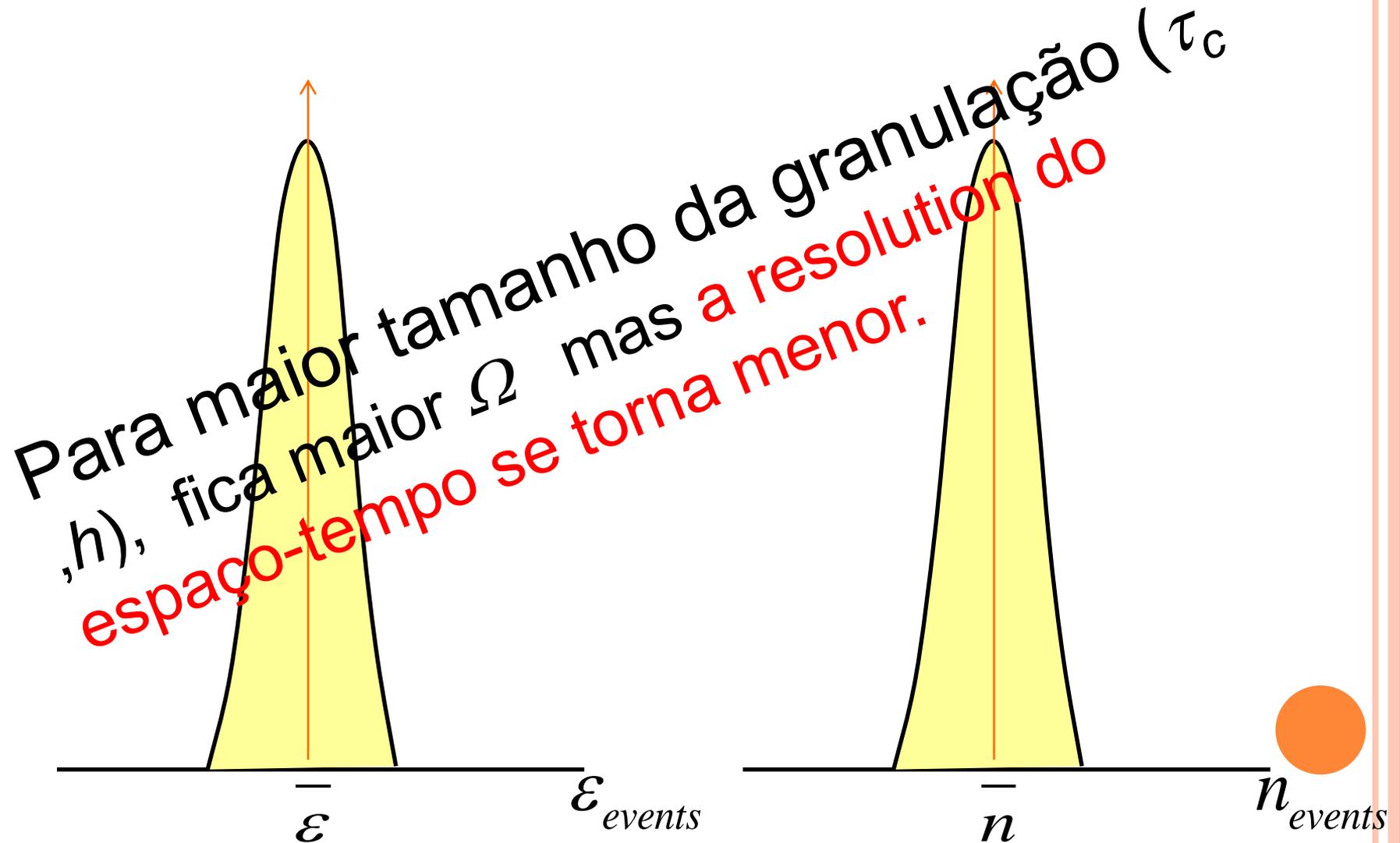
Densidades em um point no espaço e tempo, ε e n fluctuam evento por evento.



Se Ω é grande, a largura deve se tornar pequena (teorema do limite central)



Se Ω é grande, a largura deve se tornar pequena (teorema do limite central)



MODELAGEM HIDRODINAMICA IDEAL VIA PRINCÍPIO VARIACIONAL

1. $\bar{\varepsilon}$ e \bar{n} são altamente correlacionados de modo que

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\bar{n})$$

2. A dinâmica do sistema em termos de variáveis com granulação, \bar{n}^μ é determinada pela ação,

$$I = -\int d^4x \bar{\varepsilon}(\bar{n}(x))$$



MODELAGEM HIDRODINAMICA IDEAL VIA PRINCÍPIO VARIACIONAL

$$\delta I = -\delta \int d^4 x \bar{\varepsilon}(\bar{n}(x)) = 0$$

em relação a variação do variável,

$$\bar{n}^{\mu} = (\bar{n}^*, \bar{n}^* \vec{v})$$

subjeito ao vínculo,

$$\bar{n}_{\mu} \bar{n}^{\mu} = \bar{n}^2$$



MODELAGEM HIDRODINAMICA IDEAL VIA PRINCÍPIO VARIACIONAL

$$\delta I = -\delta \int d^4 x \bar{\varepsilon}(\bar{n}(x)) = 0$$

em relação a variação do variável,

$$\bar{n}^{\mu} = (\bar{n}^*, \bar{n}^* \vec{v})$$

subjeito ao vínculo,

$$\bar{n}_{\mu} \bar{n}^{\mu} = \bar{n}^{-2}$$

leva

$$\partial_{\mu} \left\{ (\bar{\varepsilon} + P) u^{\mu} u^{\nu} - P g^{\mu\nu} \right\} = 0, \quad P = \frac{d\bar{\varepsilon}}{dn} \bar{n} - \bar{\varepsilon},$$

Relativistic Euler Eqs.

CONCLUSÃO 1:

Modelagem Hidrodinâmica Ideal
PODE ser

Uma Descrição Efectiva em termos dos graus de liberdades macroscopicos seleccionados, optimizados através do Princípio Variacional da Ação para dada resolução de escala da granulação consistente com a Resolução dos Observables.



CONCLUSÃO 1:

Isso parece que explicar porque várias modelagens hidronômicas substancialmente diferentes funcionam igualmente bem....



Princípio Variacional
com
Ruidos
(Dissipação)



Princípio Variacional
com
Ruidos
(Dissipação)

Abordagem variacional não
é sempre sistema conservativo?
Como pode ?



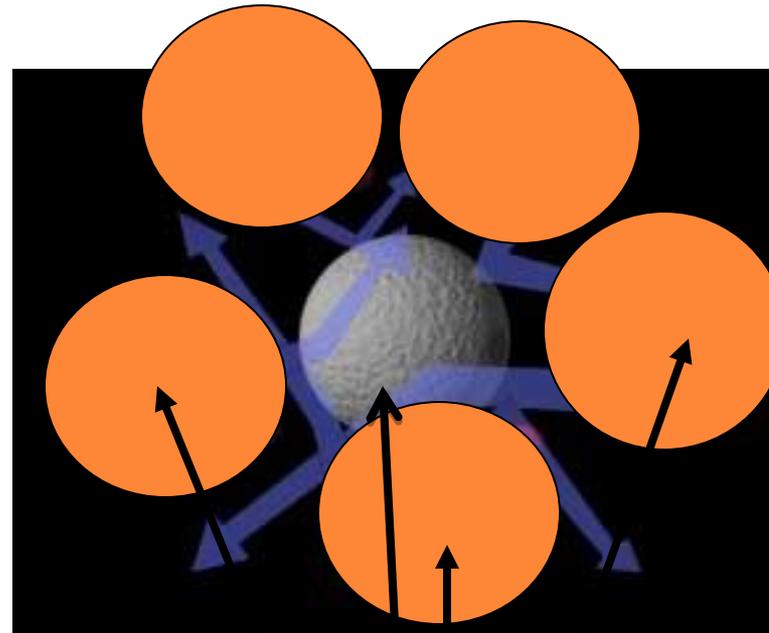
Princípio Variacional
com
Ruidos
(Dissipação)



Abordagem variacional não
é sempre sistema conservativo?
Como pode ?



EXEMPLO: PARA CADA EVENTO, A DINÂMICA DO VARIÁVEL MACROSCÓPICO FLUTUA....



Elemento do fluido

Indeterminação do elemento do fluido...

DIFERENÇA ESSENCIAL ENTRE UMA SITUAÇÃO IDEAL E CASO COM PRESENÇA DE RUÍDO

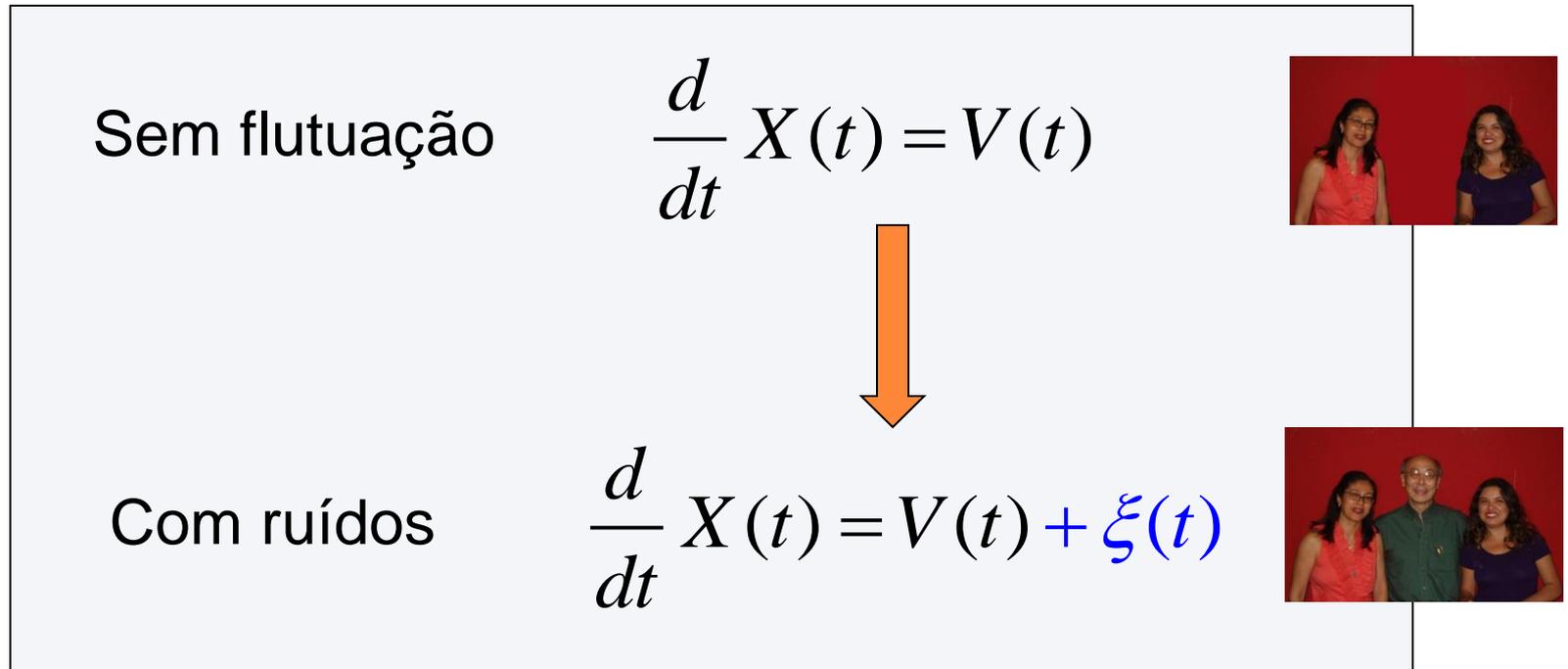


DIFERENÇA ESSENCIAL ENTRE UMA SITUAÇÃO IDEAL E CASO COM PRESENÇA DE RUÍDO



PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Os efeitos dos graus de liberdade não contemplados no variável da abordagem podem ser tratados como ruídos...



Stochastic Differential Equation - SDE

PARA UM DADO MOVIMENTO ESTOCHÁSTICO TEMOS EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANK

Density da probabilidade

$$\rho(\vec{x}, t) = \langle \delta(\vec{x} - \vec{x}(t)) \rangle$$

Média sobre todas as soluções
da SDE com uma condição inicial.

Uma solução da SDE



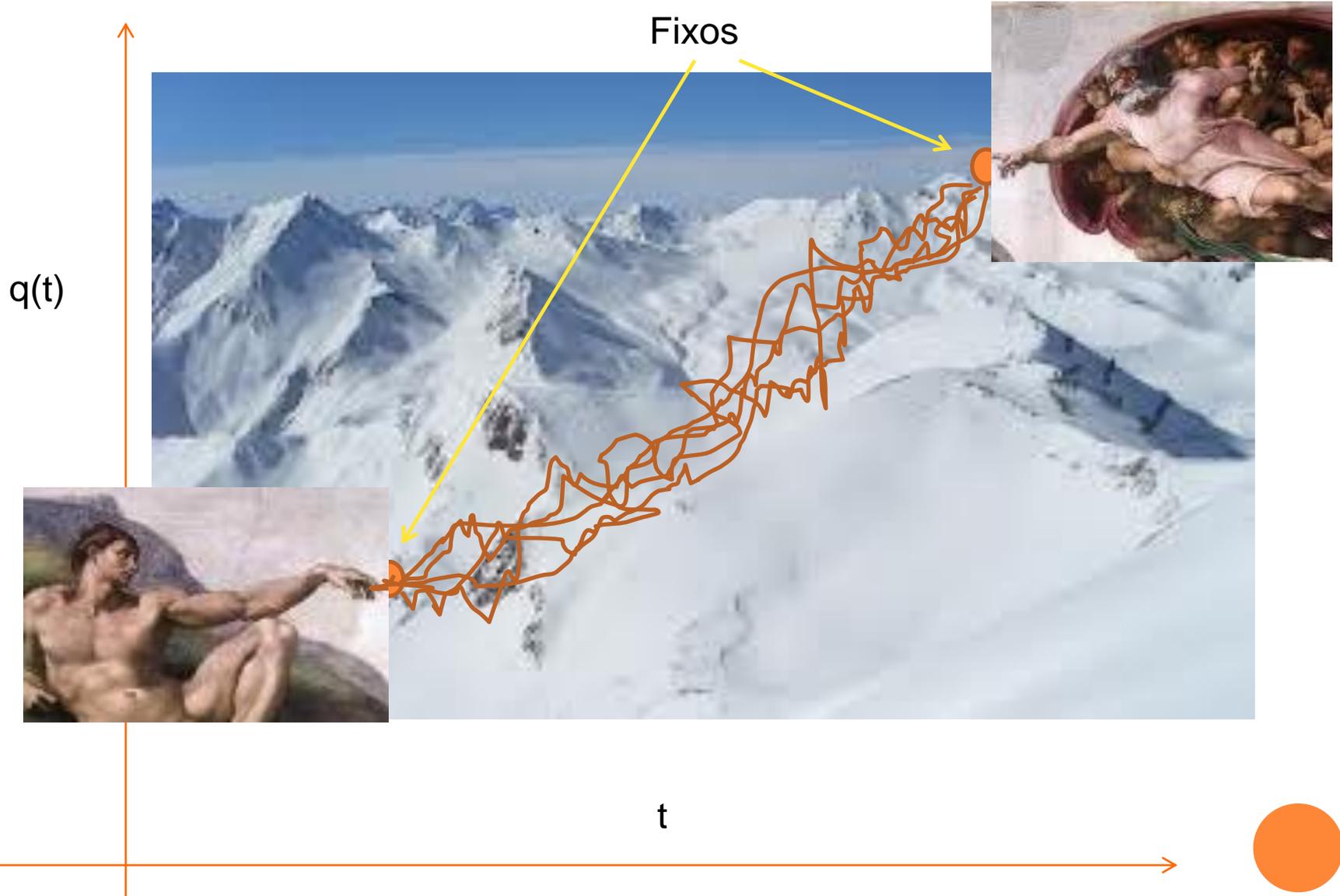


$$\frac{d}{dt} X(t) = V(t)$$

$$\frac{d}{dt} X(t) = V(t) + \xi(t)$$



PRINCÍPIO VARIACIONAL COM RUIDOS?



PRINCÍPIO VARIACIONAL COM RUIDOS?

Generalizar variáveis para o domínio estocástico

$$I = \left\langle \int_a^b dt L(X, DX) \right\rangle$$

Estamos falando necessariamente a distribuição das trajetórias....

Yasue, J. *Funct. Anal*, 41, 327 ('81), Guerra&Morato, *Phys. Rev. D*27, 1774 ('83), Nelson, "Quantum Fluctuations" ('85).

GENEALOGIA DA FORMULAÇÃO NÃO CONVENCIONAL DA MECÂNICA QUÂNTICA



Bohm-Vigier
Hidden variables

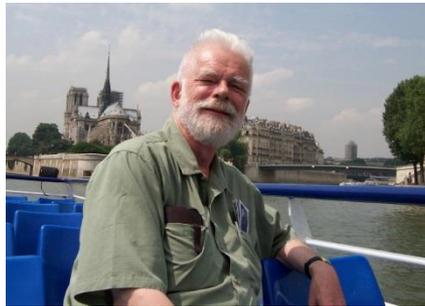


A. Eddington

de Broglie



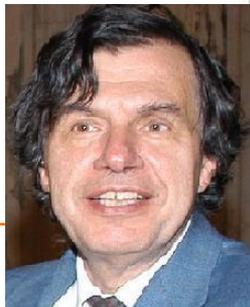
E. Madelung



Edward Nelson
- Processo estocástico



Kunio Yasue
Stochastic Variational Method



Parisi-Wu
Stochastic Quantization
5a Dim (tempo)



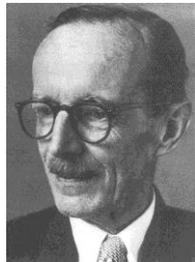
GENEALOGIA DA FORMULAÇÃO NÃO CONVENCIONAL DA MECÂNICA QUÂNTICA



Bohm-Vigier
Hidden variables



A. Eddington



E. Madelung

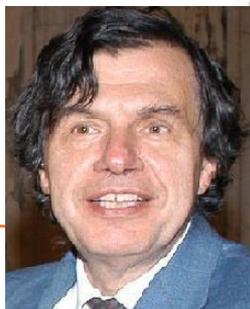
de Broglie



Edward Nelson
- Processo estocástico



Kunio Yasue
Stochastic Variational Method



Parisi-Wu
Stochastic Quantization
5a Dim (tempo)

Re-conquista do papel do
Princípio Variacional na
MQ



Conferência Solvay Bruxela 1911



GOLDSCHMIDT
NERNST

PLANCK
BRILLOUIN

RUBENS
SOMMERFELD
SOLVAY

LINDEMANN
M. DE BROGLIE
LORENTZ

HASENOHRL
HOSTELET
KNUDSEN
WARBURG
PERRIN

HERZEN
WIEN
Madame CURIE

JEANS
RUTHERFORD
POINCARÉ

KAMERLINGH ONNES

EINSTEIN

LANGEVIN

Conferência Solvay Bruxela 1911



GOLDSCHMIDT
NERNST

PLANCK
BRILLOUIN

RUBENS
SOMMERFELD
SOLVAY

LINDEMANN
M. DE BROGLIE
LORENTZ

HASENOHRL
HOSTELET
KNUDSEN
WARBURG
PERRIN

HERZEN
WIEN
Madame CURIE

JEANS
RUTHERFORD
POINCARÉ

KAMERLINGH ONNES

EINSTEIN

LANGEVIN

The impostors of Solvay

A century ago a remarkable group of scientists met in a room at the Hôtel Métropole in Brussels. They were there at the behest of Ernest Solvay, a titan of the chemical industry who – like Alfred Nobel before him – believed that putting physicists up in posh hotels was a great way of spending his money. Between 30 October and 3 November 1911, the carefully selected participants of the first ever Solvay Conference discussed the new-fangled quantum theory of radiation. At some point, they had their picture taken (right). Then they went home, whereupon the second-youngest attendee, one A Einstein, complained that he had learned nothing new.

Despite sharing some features of ordinary meetings, the first Solvay Conference would prove a watershed in the history of physics – a moment when some of the world’s finest scientific minds staged a revolution, ushering out the classical world and welcoming a quantum one in its place. Completing this transformation would not be easy, but the 24 scientists in the now-iconic photograph had every reason to feel confident in their ability to carry it off. After all, three of them had already received Nobel prizes, and six others would soon join them. Even the list of non-laureates reads like a *Who’s Who* of modern physics: Langevin, Poincaré, Brillouin, De Broglie.

Yet, if our scientific forebears were anything like us, a few of them will have looked around at the glittering Métropole group and thought “I *really* don’t belong here”. This sense of unwarranted inadequacy is called “impostor syndrome”, and sufferers may feel like frauds despite receiving prizes and invitations to prestigious conferences. It is difficult to find data on the prevalence of impostor syndrome, but one survey of medical students found that nearly a third had experienced it. Statistically speaking, an estimate of one or two Solvay “impostors” is probably conservative.

A historian could, no doubt, add some substance to this conjecture by trawling through the surviving correspondence of the 24 attendees. But even without doing such legwork, it is possible to make some informed guesses about who the “impostors” could have been.



Benjamin Couperie, 1911

If our scientific forebears were anything like us, a few of them will have looked around and thought “I *really* don’t belong here”

gered in Rutherford’s mind 16 years later.

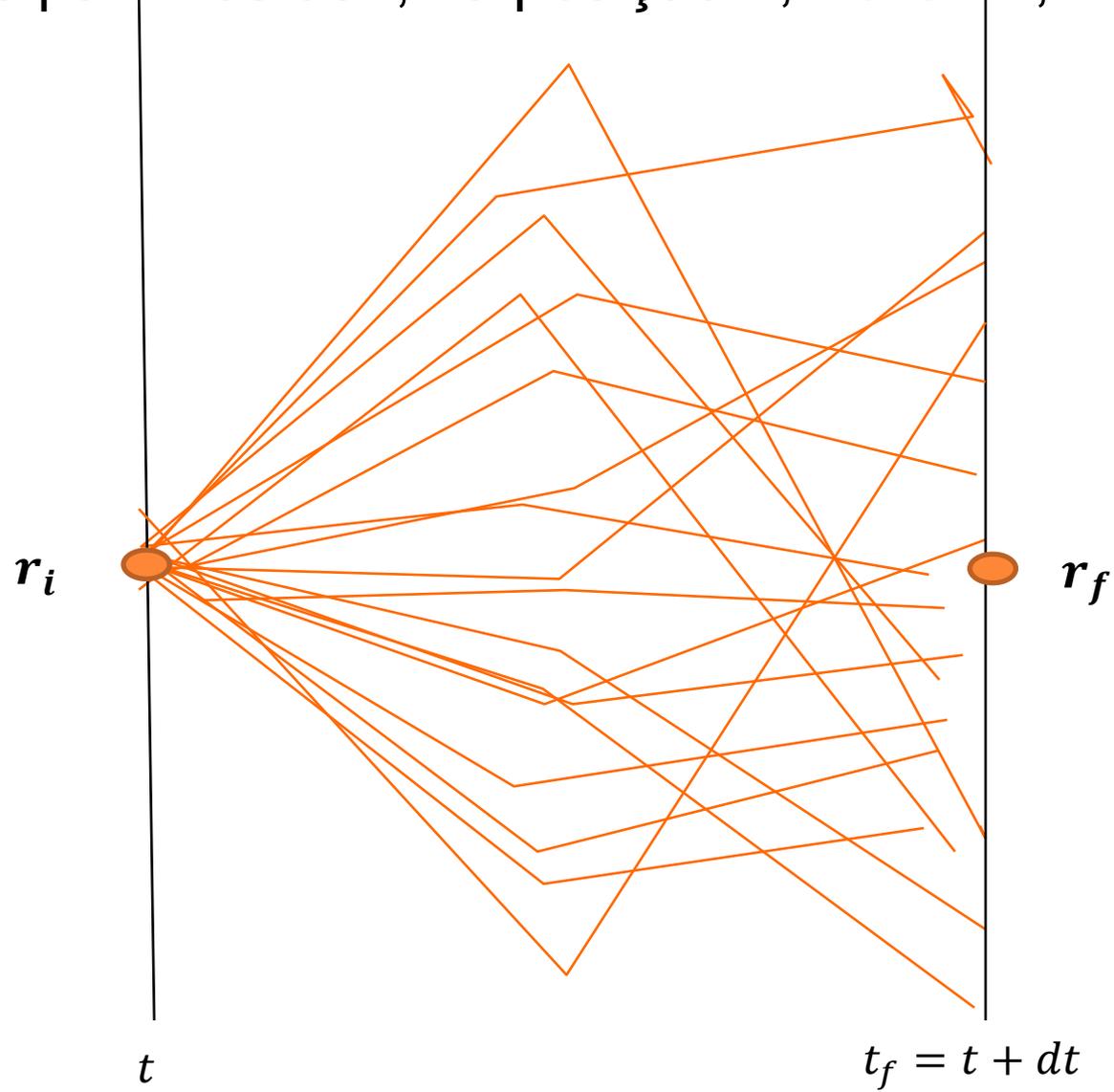
The lesser lights of Solvay also offer fruitful ground for speculation. Louis de Broglie and Léon Brillouin were notable physicists, but neither appears in the photograph. The “De Broglie” and “Brillouin” pictured are actually their less-famous relatives, Maurice and Marcel. Maurice de Broglie did bring his little brother Louis to the meeting, but only as an observer, and Maurice himself was there as a secretary, not an invited scientist. His fellow secretaries Robert Goldschmidt and Frederick Lindemann were, respectively, Solvay’s friend and Walther Nernst’s PhD student. Goldschmidt was probably the conference’s least distinguished attendee, while Lindemann was the youngest by seven years. Did they look around the room in awe?

Half a lifetime later, Lindemann would be ennobled as Winston Churchill’s scientific adviser. In 1911, though, he would have had a good reason for feeling like an impostor: he was only there because another, more famous, scientist had declined Solvay’s invitation. The same was true of Edouard Herzen, Georges Hostelet and Martin Knudsen. All were good scientists (Knudsen, in particular, invented a cell that is still used in molecular beam ani-

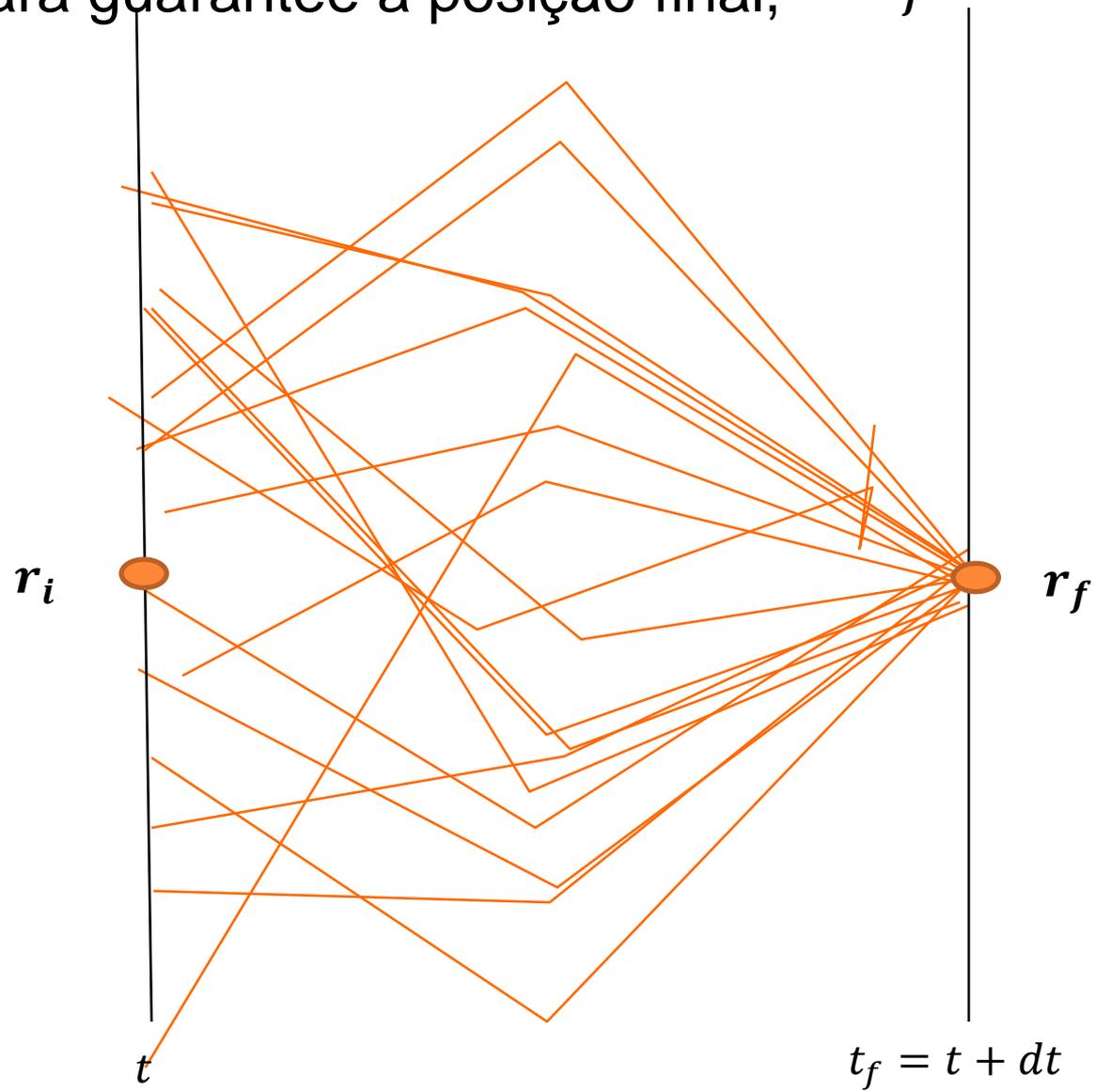
PROCESSO ESTOCÁSTICO
VS.
CONDIÇÃO DE CONTORNO



Se partimos de t , na posição r_i , via SDE,...



Para garantir a posição final, r_f



FORWARD SDE

$$d\vec{r} = \vec{u}(\vec{r}(\vec{R}, t), t)dt + \sqrt{2\nu} \cdot d\vec{W}(t) \quad (dt > 0)$$

com Ruído Branco

$$\langle d\vec{W}(t) \rangle = 0 \quad \langle dW^i(t)dW^j(t) \rangle = \delta^{ij} dt$$

BACKWARD SDE

$$d\vec{r} = \vec{u}(\vec{r}(\vec{R}, t), t)dt + \sqrt{2\nu} \cdot d\vec{W}(t) \quad (dt < 0)$$

$$\langle d\vec{W}(t) \rangle = 0 \quad \langle d\vec{W}^i(t)d\vec{W}^j(t) \rangle = \delta^{ij} |dt|$$

AS DUAS SDE'S TEM QUE DESCREVER UM *MESMO ENSEMBLE ESTATÍSTICO*

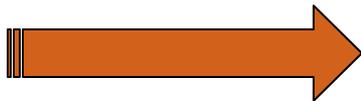
Equação de Fokker-Planck (Forward)

$$\partial_t \rho = -\nabla (\vec{u} - \nu \nabla) \rho$$

Equação de Fokker-Planck (Backward)

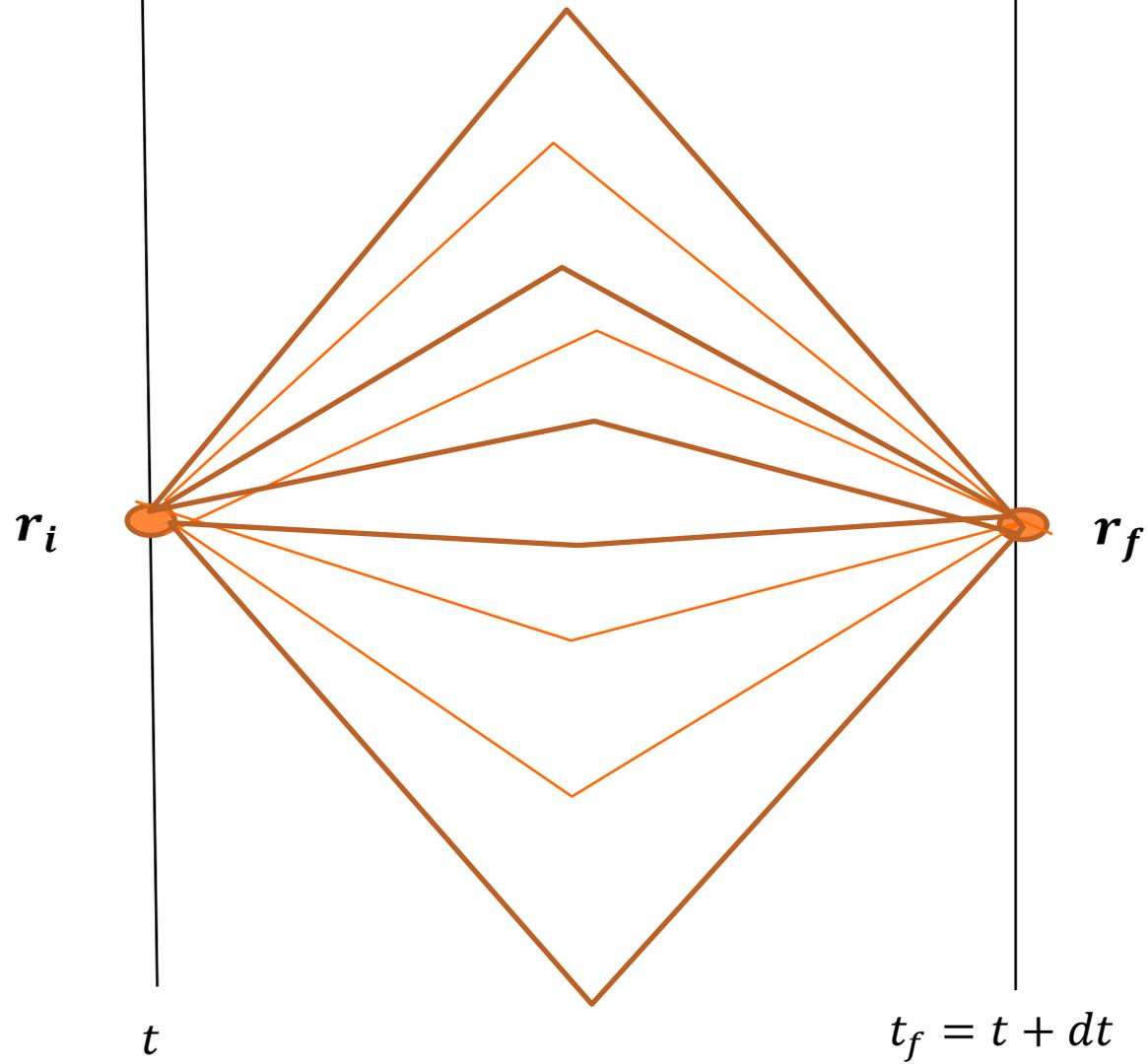
$$\partial_t \rho = -\nabla (\vec{\tilde{u}} + \nu \nabla) \rho$$

As duas equações devem ser iguais...

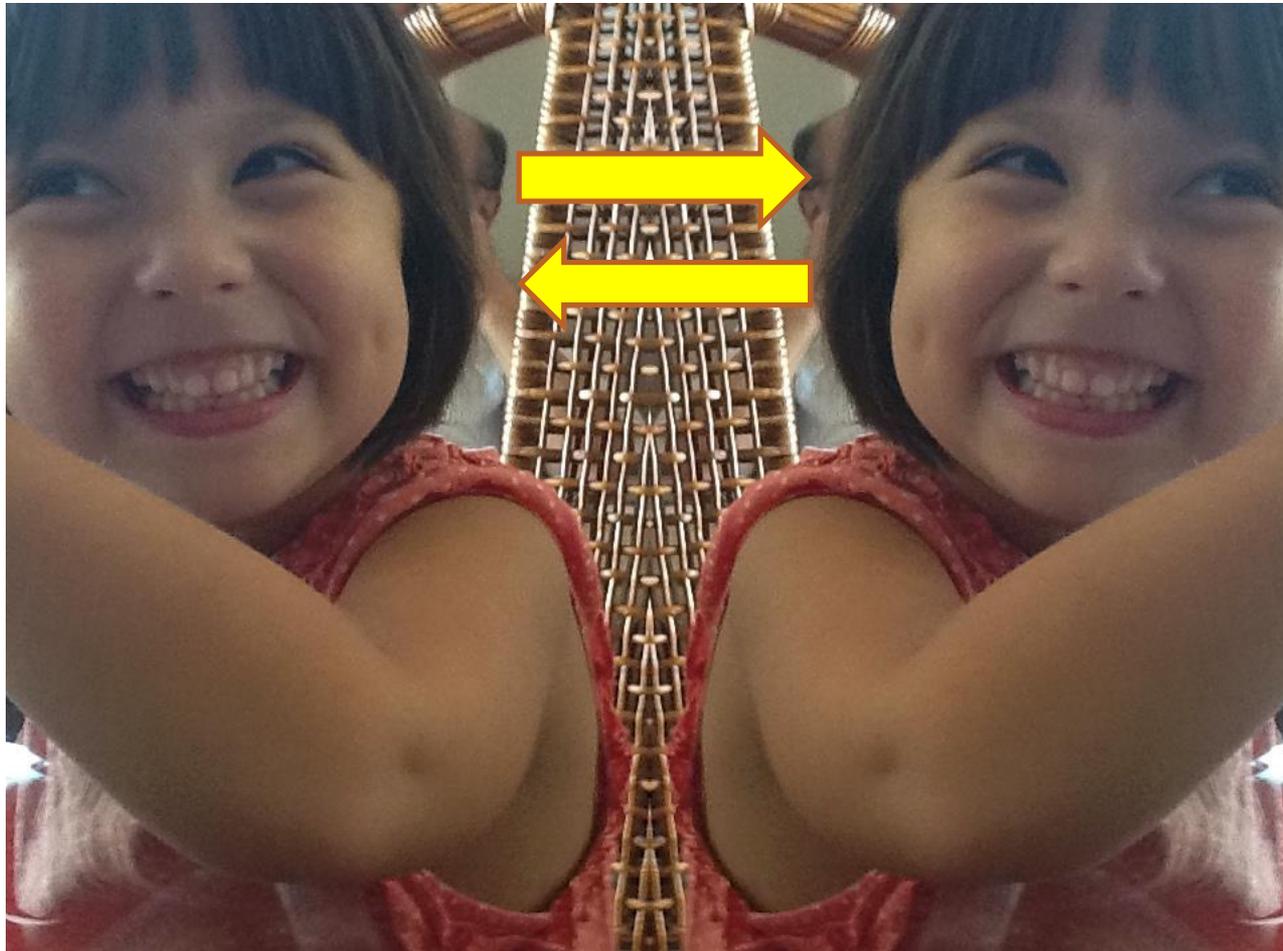


$$\vec{\tilde{u}} = \vec{u} + 2\nu \nabla \ln \rho$$

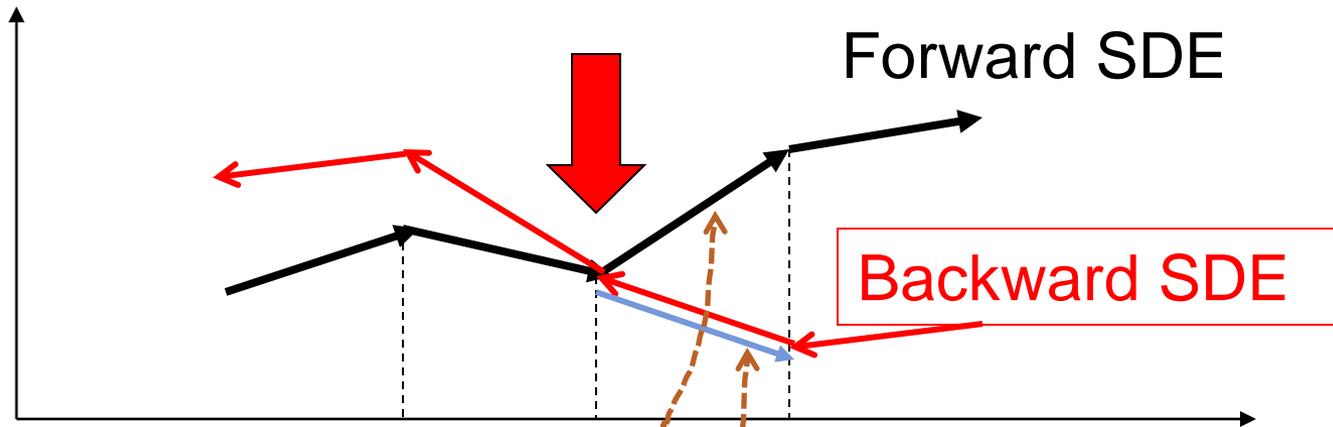
Matematicamente, o processo Bernstein,



Ou introdução de um processo “reciproco”



COMO DEFINIR A VELOCIDADE DE UM EVENTO NO PONTO X ?



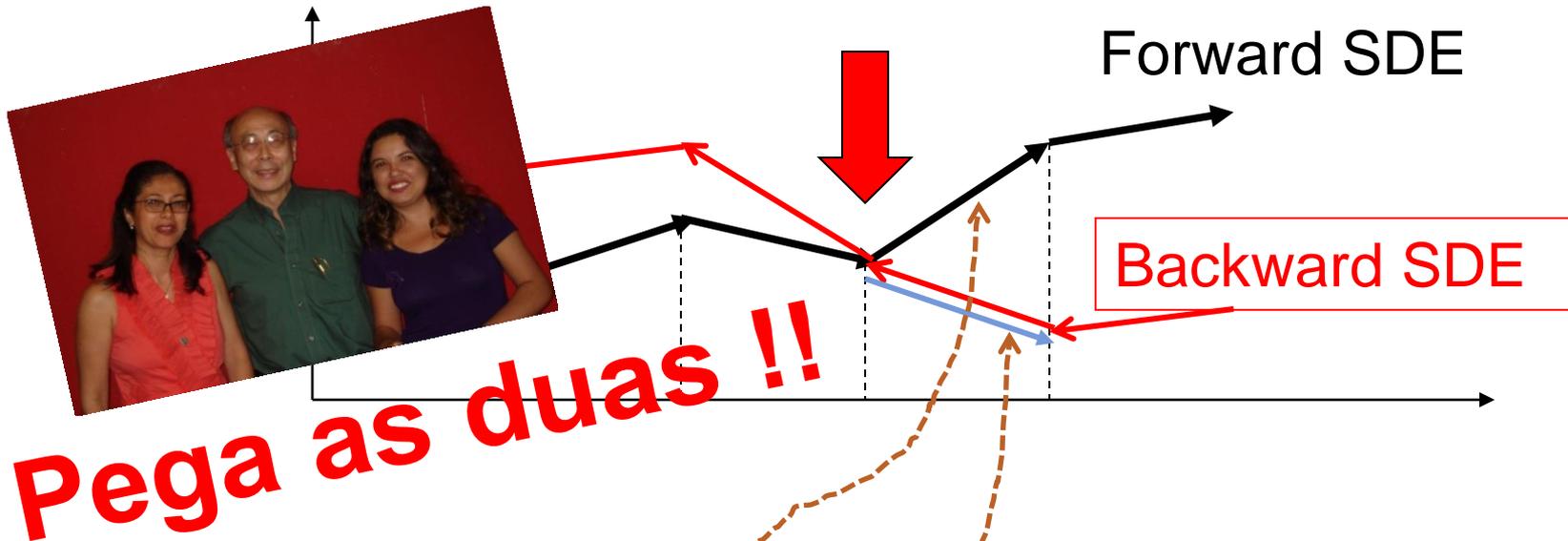
$$\vec{v} = \lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{\vec{r}(\vec{R}, t + dt) - \vec{r}(\vec{R}, t)}{dt}$$

Forward SDE

$$\vec{v} = \lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{\vec{r}(\vec{R}, t) - \vec{r}(\vec{R}, t - dt)}{dt}$$

Backward SDE

COMO DEFINIR A VELOCIDADE DE UM EVENTO NO PONTO X ?



$$\vec{v} = \lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{\vec{r}(\vec{R}, t + dt) - \vec{r}(\vec{R}, t)}{dt}$$

Forward SDE

$$\vec{v} = \lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{\vec{r}(\vec{R}, t) - \vec{r}(\vec{R}, t - dt)}{dt}$$

Backward SDE

Prinípio Variacional $\delta I = \delta \left\langle \int_a^b dt L(X, DX, \tilde{D}X) \right\rangle = 0$

$$(\partial_t + \vec{u}_m \cdot \nabla) \vec{u}_m - 2\nu^2 \nabla \left(\rho^{-1/2} \nabla^2 \sqrt{\rho} \right) = -\frac{1}{m} \nabla V$$

Da Fokker-Planck $\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}_m) = 0,$

$$\partial_t \rho + 2\nu \nabla \cdot (\rho \nabla \mathcal{G}) = 0, \quad \nabla \mathcal{G} = \vec{u}_m / (2\nu)$$

$$\nabla \left[\partial_t \mathcal{G} + \nu (\nabla \mathcal{G})^2 - \nu \left(\rho^{-1/2} \nabla^2 \sqrt{\rho} \right) + \frac{1}{m} \nabla V \right] = 0$$

Essas duas equações são equivalente a equação,

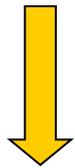
$$i\partial_t \varphi = \left[-\nu \nabla^2 + \frac{1}{2\nu m} V \right] \varphi, \quad \text{com } \varphi \equiv \sqrt{\rho} e^{i\mathcal{G}},$$

Resumindo,

Ação Clássica

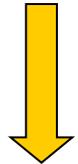
$$I_{cla} = \int_a^b dt \left(\frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right)^2 - V(\vec{r}(t)) \right)$$

Ação Estocástica



$$I_{sto} = \int_a^b dt \left\langle \frac{m}{2} \frac{(D\vec{r})^2 + (\tilde{D}\vec{r})^2}{2} - V(\vec{r}) \right\rangle$$

A equação de Fokker-Planck equation mais a equação de Euler-Lagrange estocástica


$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}_m) &= 0, \\ (\partial_t + \vec{u}_m \cdot \nabla) \vec{u}_m - 2\nu^2 \nabla (\rho^{-1/2} \nabla^2 \sqrt{\rho}) &= -\frac{1}{m} \nabla V \end{aligned}$$

Equação de Schrödinger

$$i\hbar \partial_t \varphi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] \varphi,$$

$$\varphi \equiv \sqrt{\rho} e^{i\mathcal{G}},$$

$$\vec{u} = 2\nu \nabla \mathcal{G},$$

$$\nu = \hbar / 2m.$$

APLICAÇÕES DO MÉTODO VARIACIONAL ESTOCÁSTICO

- Dedução da Equação de Navier-Stokes com correção da pressão difusiva
- Dedução da Equação de Gross-Pitaevskii
- Dedução da Equação de Kostin
- Quantização do campo de Klein-Gordon

- 1) T. Koide and T. K, .J. PhysA: 45(25):255204
- 2) T.Koide and T.K, arXiv: 1208.0258v1
- 3) T.Koide and T.K., arXiv: 1306.6922v1

Homens Trabalhados



A condição de consistência para as velocidades “forward” e “backward”

$$u - \tilde{u} \sim \nabla \ln(n) \quad \longrightarrow \quad n \sim n_0 \exp(u - \tilde{u}) dr$$

é nada mais que a relação de Einstein para pressão osmótica, sugerindo que o equilíbrio entre dois processos de difusão, “forward” e “backward”.

Podemos pensar a escala do tempo “micro” no SVM como equivalente a 5ª dimensão temporal no formalismo de Parisi-Wu?

Feynmann Path Integral ?

Bernstein Process (Processo Reciproca)

Escrevendo

$$\theta(x, t) = \sqrt{\rho(x, t)} e^{\alpha(x, t)}$$

$$\bar{\theta}(x, t) = \sqrt{\rho(x, t)} e^{-\alpha(x, t)}$$

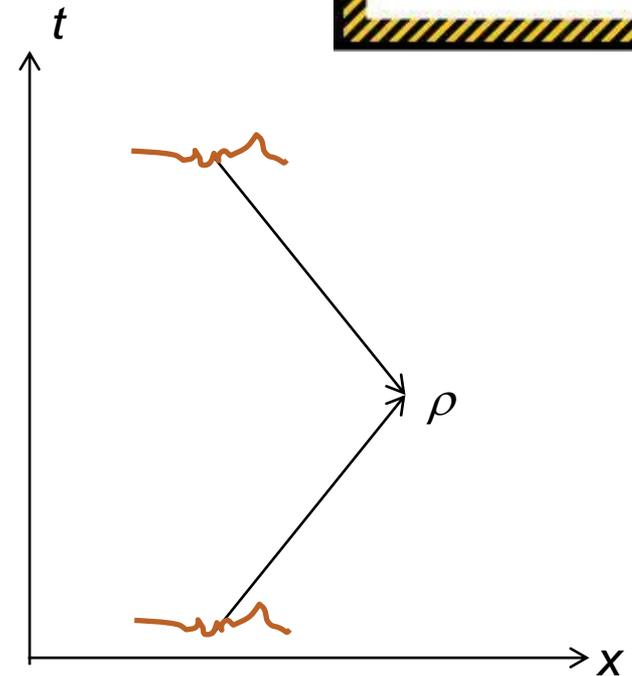
$$\text{Max}(\rho \ln \rho)$$

with

$$H(x, p), H(x, \bar{p}) : \text{Const}$$

$$\rightarrow \theta(x, t) = \int dx' K(x, t; x', t - \Delta t) \theta_0(x')$$

$$K(x, t; x', t') = \exp(-\Delta t H)$$



Feynmann Path Integral ?

Bernstein Process

Escrevendo

$$\theta(x, t) = \sqrt{\rho(x, t)} e^{\alpha(x, t)}$$

$$\bar{\theta}(x, t) = \sqrt{\rho(x, t)} e^{-\alpha(x, t)}$$

$$\text{Max}(\rho \ln \rho)$$

with

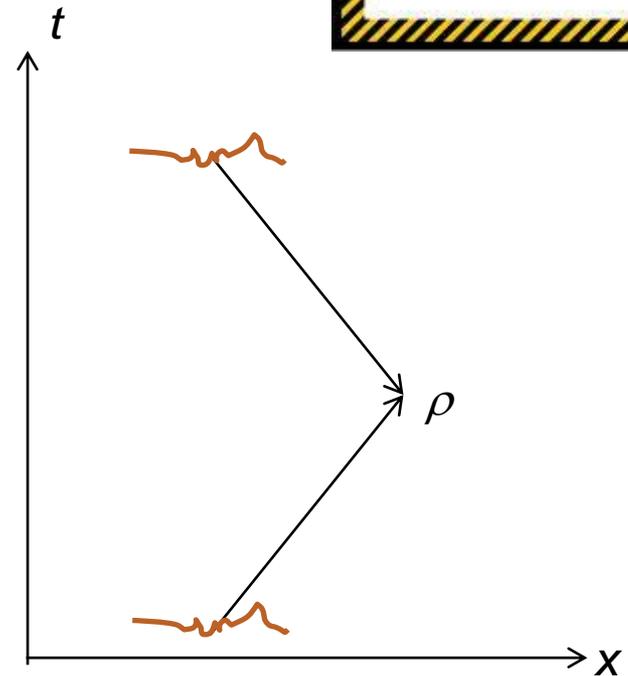
$$H(x, p), H(x, \bar{p}) : \text{Const}$$

?

$$\Rightarrow \theta(x, t) = \int dx' K(x, t; x', t - \Delta t) \theta_0(x')$$

$$K(x, t; x', t') = \exp(-\Delta t H)$$

Homens Trabalhado



RESUMO e PERSPECTIVAS

- Formulação Variacional com Processos com ruídos requer introdução de processos recíprocos com condição de consistência.
- Ruídos geram o termo de tensão superficial.
- Pode obter a Equação de Schrödinger a partir de SVM
- Pode ser usado como uma alternativa para quantização?
- Relação com a Integral de trajetório de Feynman?



FIM



FIM

PS: Ano que vem,
50 anos do
IF-UFRJ !

