SILVA, Cibelle Celestino. A escolha de uma ferramenta matemática para a física: o debate entre os quatérnions e a álgebra vetorial de Gibbs e Heaviside. *In*: MARTINS, R. A.; MARTINS, L. A. C. P.; SILVA, C. C.; FERREIRA, J. M. H. (eds.). *Filosofia e história da ciência no Cone Sul: 3º Encontro*. Campinas: AFHIC, 2004. Pp. 115-126. (ISBN 85-904198-1-9)

# A ESCOLHA DE UMA FERRAMENTA MATEMÁTICA PARA A FÍSICA: O DEBATE ENTRE OS QUATÉRNIONS E A ÁLGEBRA VETORIAL DE GIBBS E HEAVISIDE

Cibelle Celestino Silva *

*Resumo – No final do século XIX, a revista* Nature *foi palco de uma emocionante disputa entre dois sistemas matemáticos envolvendo pessoas inteligentes e espirituosas. De um lado Peter G. Tait, Cargill Knott, Alexander MacFarlane, e outros, do outro lado Willard Gibbs e Oliver Heaviside e no meio deles, James Clerk Maxwell. A questão debatida era qual o sistema matemático mais apropriado para tratar as grandezas vetoriais. De um lado estavam os defensores do uso dos quatérnions e de outro os defensores da análise vetorial. A análise vetorial como conhecemos hoje não existia no tempo de Maxwell e foi inventada por Gibbs e Heaviside independentemente, em parte devido à inspiração de Maxwell e, como discutiremos, teve suas origens no método rival dos quatérnions. Estes últimos negam qualquer influência dos quatérnions sobre seu sistema e afirmam que os quatérnions são totalmente dispensáveis. Mas será que os quatérnions foram tão inúteis assim? Um dos principais fatores que torna este debate interessante é o fato de os debatedores serem físicos importantes e respeitados na época com interesses em matemática. Além disso, o estilo metafórico – e às vezes agressivo – da argumentação, usado principalmente por Heaviside e Tait, também contribui para aumentar o interesse no debate..*

## INTRODUÇÃO

A física do século XIX trouxe o conceito de campo e com ele um grande número de entidades do tipo que atualmente chamamos “vetores” e também a necessidade de um método de análise para lidar com essas novas entidades de uma maneira mais prática (WHITTAKER, 1973). Essas inovações

* Grupo de História e Teoria da Ciência, Instituto de Física "Gleb Wataghin", Universidade Estadual de Campinas, SP, Brasil. E-mail: cibelle@ifi.unicamp.br.

vieram em parte dos desenvolvimentos em mecânica, hidrodinâmica, óptica teórica e sobretudo do sucesso da teoria eletromagnética. James Clerk Maxwell (1831–1879) foi uma figura muito influente na história da análise vetorial, pois mostrou a necessidade e importância de um enfoque vetorial para a solução dos problemas físicos da época.

A análise vetorial usada para tratar o espaço euclidiano como conhecemos hoje[1] não existia no tempo de Maxwell e foi inventada por Willard Gibbs (1839–1903) e Oliver Heaviside (1850–1925) independentemente, em parte devido à inspiração de Maxwell e, como discutiremos, teve suas origens no método rival dos quatérnions.

No final do século XIX, mais precisamente na década de 1890, a revista *Nature* foi palco de uma emocionante disputa entre dois sistemas matemáticos envolvendo pessoas inteligentes e espirituosas. A questão debatida era qual o sistema matemático mais apropriado para tratar as grandezas vetoriais. Um dos principais fatores que torna este debate interessante é o fato de os debatedores serem físicos importantes e respeitados na época com interesses em matemática. Além disso, o estilo metafórico – e, às vezes, agressivo – da argumentação, usado principalmente por Heaviside e Tait, também contribui para aumentar o interesse no debate.

A grande maioria dos artigos polêmicos (envolvendo 8 revistas científicas importantes, 12 cientistas e 36 publicações) foi publicada entre 1890 e 1894. Mais da metade dos artigos apareceu na revista *Nature*. Neste trabalho não vamos discutir individualmente cada artigo publicado, mas sim discutir as idéias e argumentos envolvidos em cada lado da disputa.[2]

Através dos argumentos apresentados no debate podemos entender como os adeptos de teorias vetoriais viam seus sistemas e de seus oponentes, a tática usada para convencer o público a aderir a eles e também qual a relação entre os sistemas, já que ambos têm grande semelhança.

De um modo geral, podemos resumir a controvérsia da seguinte forma. De um lado estão os defensores dos quatérnions dentro da tradição pura de William Hamilton (1805–1865) e de outro os defensores de novos sistemas vetoriais, entre os quais estão Gibbs e Heaviside. Estes últimos, durante o debate, negaram qualquer influência dos quatérnions sobre seu sistema, afirmando que os quatérnions eram totalmente dispensáveis. Mas será que os quatérnions foram tão inúteis assim? Veremos que não.

## O QUE É UM QUATÉRNION?

A invenção dos quatérnions por William Hamilton em 1843 está intimamente relacionada com seus estudos sobre números complexos, sua representação geométrica e das idéias a eles associadas. Hamilton havia mostrado como construir o plano dos números complexos usando pares reais; a correspondência entre números complexos ($x + y\,j$ com x,y reais) e vetores planos mostrava como os números complexos podem se relacionar com os pares de números reais.

A tentativa de generalização natural para um número complexo representar algo no espaço tridimensional seria buscar a correspondência entre vetores no espaço e os elementos do campo de tríades reais do tipo $a+bi+cj$. Essa analogia mostrou-se infrutífera, mas Hamilton insistiu em sua possibilidade por anos, até pensar na possibilidade de quartetos, os quatérnions:

> E aqui começou a ficar claro para mim que devemos admitir, em algum sentido, uma *quarta dimensão* no espaço para o cálculo dos tripletos ou, transferindo o paradoxo para a álgebra, admitir um terceiro símbolo imaginário *k*. [...] assim fui levado a introduzir quatérnions, tais como $a+ib+jc+kd$, ou (a, b, c, d). (HAMILTON, 1967, p. 108)

[1] Esta análise vetorial tornou-se conhecida repentinamente a partir da publicação do trabalho de Gibbs em 1881.

[2] Para conhecer um resumo do conteúdo de cada artigo, veja os artigos BORK 1966 e STEPHENSON 1966.

Dentro do cálculo de quatérnions, os símbolos *i, j, k* são unidades imaginárias que obedecem às regras:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = k,\ ji = -k,\ ki = j,\ ik = -j,\ jk = i,\ kj = -i.$$

Para entendermos melhor o significado geométrico de um quatérnion e dos símbolos *i, j, k*, vamos primeiro interpretar geometricamente um número complexo. Na figura 1, o vetor **r** = a + b*i* representa um número complexo em um plano com as componentes real a e imaginária b. Se fizermos **r**' = *i* **r** = -b + a*i* e **r**" = *i* **r**' = -a - *i*b = - **r**, teremos que *ii* **r** = -**r** e $i^2$ = - 1. A figura mostra que multiplicar um vetor **r** por *i* e $i^2$ produz nele uma rotação anti-horária de π/2 e π respectivamente.

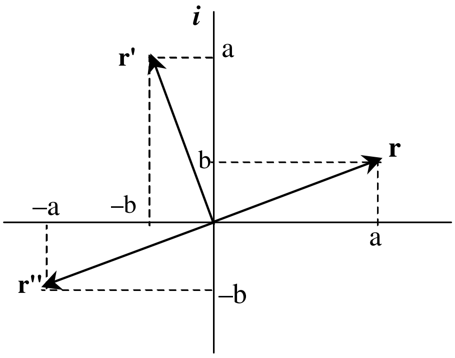


**Figura 1.**

Sendo assim, o símbolo *i* representa tanto uma direção (eixo imaginário) quanto um operador que produz rotações de π/2 no sentido anti-horário. Com esta última interpretação em mente, Hamilton definiu o conceito de "versor perpendicular" (posteriormente chamados de "versores quadrantais" por Tait) a partir de um sistema de três vetores unitários perpendiculares entre si como sendo o quatérnion capaz de rodar um vetor de π/2 em torno de uma direção perpendicular ao vetor e ao quatérnion.

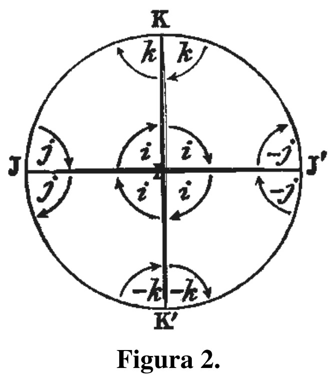


**Figura 2.**

Hamilton definiu também um conjunto de três vetores unitários perpendiculares entre si, I, J, K, de modo que o operador que transforma J em K é um versor quadrantal e como seu eixo de rotação é o vetor I, Hamilton o chamou de *i.* Assim, K/J = *i* ou K = *i*J, como mostra a figura 2. Analogamente podemos escrever I = *j*K e J = *k*I. Apesar de os conjuntos I, J, K e *i, j, k* terem significados diferentes, Hamilton e Tait passaram a usá-los como sendo conjuntos equivalentes.[3] Um quatérnion q = a + *i*x + *j*y + *k*z possui uma parte real (a) e uma parte imaginária (*i*x + *j*y + *k*z), também chamada de "quatérnion puro". De acordo com Hamilton,

> A parte algebricamente real pode ser chamada *parte escalar*, ou simplesmente *escalar* de um quatérnion, e simbolizada prefixando ao símbolo do quatérnion, o característico Scal., ou simplesmente S. (...). Por outro lado, a parte algebricamente imaginária, sendo construída geometricamente por uma linha reta, ou raio vetor[4], que em geral tem um comprimento determinado e uma direção no espaço determinada para cada quatérnion, pode ser chamada *parte vetorial*, ou simplesmente *vetor* do quatérnion; e pode ser denotada prefixando o característico Vect. ou V. (HAMILTON 1967, p. 236)

Hamilton definiu as operações algébricas entre dois quatérnions, tais como soma, subtração, divisão e produto. Como o produto entre dois quatérnions foi um dos aspectos mais debatidos durante a controvérsia da década de 1890, vamos apresentá-lo em mais detalhes. Usando as regras de multiplicação entre *i, j, k* dadas pelas equações (1), o produto entre dois vetores $\alpha = (ix+jy+kz)$ e $\beta = (iu+jv+kw)$ pode ser escrito como:

$$\alpha\beta = -\,\mathrm{xu} + k\mathrm{xv} - j\mathrm{xw} - k\mathrm{yu} - \mathrm{yv} + i\mathrm{yw} + j\mathrm{zu} - \mathrm{zw} - i\mathrm{zv} - \mathrm{zw} =$$
$$= -\,(\mathrm{xu} + \mathrm{yv} + \mathrm{zw}) + i(\mathrm{yw} - \mathrm{zv}) + j(\mathrm{zu} - \mathrm{xw}) + k(\mathrm{xv} - \mathrm{yu}) = \mathrm{S}\alpha\beta + \mathrm{V}\alpha\beta,$$

Como vemos, o produto entre dois quatérnions também é um quatérnion pois é formado pela soma de uma parte escalar real e uma parte vetorial imaginária. Notemos que a parte escalar do produto tem sinal negativo. Além disso, o produto entre dois quatérnions não obedece a propriedade comutativa, isto é, $\alpha\beta = -\beta\alpha$, pois de acordo com (1), $ij = -ji$.

## O OPERADOR ∇

O operador que chamamos atualmente de nabla[5], simbolizado por ∇, foi definido em 1847 por Hamilton[6] e representado pelo símbolo $\lhd$ para representar simbolicamente o operador de Laplace $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2$, que já era assim chamado e que era bem conhecido e usado em problemas físicos da época.

Para isso, Hamilton definiu o quatérnion

[3] HAMILTON, 1969, vol I, pp. 242 e 335-45 e TAIT, 1873, p. 37. Na época, O'Brien percebeu essa mistura de significados e símbolos, preferindo usar α, β, γ para representar os vetores unitários, mantendo *i, j, k* para representar as unidades imaginárias (O'BRIEN, 1852, p. 178). O uso do mesmo símbolo para representar vetores unitários e versores pode ser entendido como causa de problemas conceituais existentes na álgebra vetorial moderna; para mais detalhes veja SILVA & MARTINS, 2002.

[4] HAMILTON 1967, p. 236-237. O termo "raio vetor" era usado em astronomia para designar uma linha imaginária ligando um planeta que se move ao redor de um centro.

[5] Maxwell sugere o nome "nabla" pois este é o nome em hebreu da cunha assíria que tem o formato ∇ (MAXWELL 1995, p. 577).

[6] HAMILTON 1967, p. 262. Em uma nota de rodapé acrescentada na página 548 do *Elements of quaternions*, o editor Charles J. Joly comenta que o símbolo ∇ passou a ser usado por ser parecido com o símbolo da derivada parcial.

$$\triangleleft = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz},$$

onde x, y, z são coordenadas retangulares e *i, j, k* são vetores unitários paralelos aos eixos coordenados.

O operador ∇ aplicado em um vetor também é um quatérnion escrito na forma:

$$\triangleleft\left(it + ju + kv\right) = -\left(\frac{dt}{dx} + \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dz}\right) + i\left(\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dz}\right) + j\left(\frac{dv}{dx} - \frac{dt}{dz}\right) + z\left(\frac{dt}{dy} - \frac{du}{dz}\right).$$

que também é um quatérnion pois é formado pela soma de uma parte escalar e outra vetorial:

$$\nabla\omega = S\nabla\omega + V\nabla\omega.$$

O desenvolvimento desse operador, tão importante para a física, foi feito principalmente por Tait.

## PETER TAIT

Tait dedicou trinta e seis anos de sua vida à divulgação e desenvolvimento da análise de quatérnions. Entre 1865 e 1901, escreveu oito livros sobre quatérnions[7], desenvolveu novos teoremas e aplicações físicas para a teoria, principalmente aplicações do operador ∇ como, por exemplo, o estudo da rotação de corpos rígidos, tensões homogêneas, efeitos de correntes elétricas sobre magnetos e os efeitos entre correntes. Tait aplicou o operador ∇ em funções escalares e vetoriais como potencial de uma força, fluxo de calor, vetor deslocamento de um ponto em um meio elástico, a força elétrica, corrente elétrica, etc. É interessante notarmos que Tait também utilizou os quatérnions considerando a parte escalar separada da parte vetorial, alterando assim o significado original de um quatérnion (TAIT, 1873, pp. 260-88).

Tait discutiu também o operador ∇ incluindo os, hoje assim chamados, teoremas de Gauss e Stokes e suas aplicações em problemas físicos. Como exemplo de sua notação, o teorema de Gauss era escrito como:

$$\iiint S.\nabla\sigma \, d\varsigma = \iint S.\sigma \, U\nu \, ds,$$

onde ν é a normal da superfície no ponto ρ, $d\zeta$ um elemento de volume, *ds* um elemento de área.[8]

A maior contribuição de Tait foi deixar de lado a ênfase matemática dada anteriormente para a análise de quatérnions, explorando também sua utilidade como ferramenta para a física, além de introduzir desenvolvimentos no método. Essa foi uma etapa importante para o desenvolvimento da análise vetorial moderna a partir da análise de quatérnions. Tait foi importante para a divulgação da teoria de quatérnions, não só por ter desenvolvido teoremas e aplicações físicas, mas também por ter sido através dele que Maxwell se interessou pelos quatérnions pois foram amigos íntimos e trocaram

[7] Incluindo reedições, traduções e coautorias.

[8] TAIT 1873, p. 268. Normalmente os quaternionistas não usam nenhum símbolo para representar o produto entre dois vetores, mas neste caso, Tait usou um ponto para representar que o produto entre ∇ e $\sigma$ deve ser feito primeiro e depois devemos tomar a parte escalar do produto $\nabla\sigma$.

muitas correspondências sobre o assunto (MAXWELL 1995).

## MAXWELL E OS QUATÉRNIONS

Os trabalhos iniciais de Maxwell, bem como de outros autores da época, utilizavam o formalismo de componentes. Fica claro pelo estudo da correspondência trocada entre 1870 e 1873 com Tait que Maxwell só começou a aprender sobre quatérnions por volta de 1867, ano da primeira edição do *Elementary treatise on quaternions* de Tait.

Em 1870, Maxwell publicou o *Manuscrito sobre as aplicações dos quatérnions no eletromagnetismo* (MAXWELL, 1995, pp. 568-69). Neste manuscrito, Maxwell aplica o operador $\nabla$ a uma função escalar $F$, chamando essa operação "slope" (inclinação); a uma função vetorial $\sigma$, separando o resultado em duas partes independentes: uma parte escalar que batizou de "convergência"[9] e uma parte vetorial batizada de "rotacional". A figura 3 mostra a representação geométrica desses operadores. Além disso chamou o $\nabla^2$ aplicado a qualquer função de "concentração" da função.

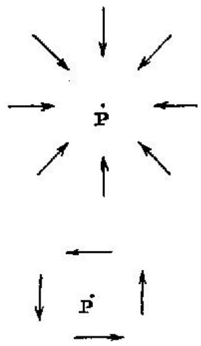

**Figura 3.**

Para Maxwell "a invenção dos quatérnions é um passo para o conhecimento das quantidades relacionadas ao espaço que só pode ser comparado em importância com a invenção das coordenadas triplas de Descartes" (MAXWELL 1995, p. 571). Apesar de reconhecer a importância do cálculo de quatérnions, Maxwell não se referiu aos quatérnions como entes matemáticos, mas sim aos vetores e escalares separadamente, seguindo sua proposta de adotar as idéias do cálculo de quatérnions, mas não suas operações e métodos.

O livro *Treatise on electricity and magnetism* de Maxwell, publicado em 1873, é o trabalho científico mais importante para a divulgação da teoria de quatérnions já que tem a visão completa de Maxwell sobre o assunto e também porque incentivou físicos importantes da época a discutirem sobre esse formalismo. Apesar de reconhecer a importância do cálculo de quatérnions, algumas de suas partes desagradavam Maxwell, como por exemplo o fato de um quatérnion ser composto por uma parte escalar e outra vetorial, o produto completo entre dois quatérnions (que nunca foi usado) e o fato de o quadrado de um vetor ser negativo. Os aspectos que agradaram a Maxwell foram incorporados em seu *Treatise* e os que não o agradaram não (MAXWELL, 1995, pp. 570-576).

Crowe divide o uso de quatérnions no *Treatise* em três grupos (CROWE, 1967, pp. 135-136): os casos onde Maxwell dá os resultados na forma de quatérnions no final da seção; os casos onde a

[9] A "convergência" de Maxwell é igual ao nosso divergente, porém com sinal negativo.

notação de quatérnions é usada de forma tão elementar que pouca importância é atribuída a ela; e os casos onde usa expressões na forma de quatérnions de modo que elas integram o desenvolvimento desejado, principalmente a aplicação dos produtos escalar e vetorial. Como exemplo do primeiro grupo, podemos citar o capítulo “Equações gerais do campo eletromagnético” (MAXWELL 1954, vol. II, pp. 257-259), no qual escreve as equações da eletrodinâmica na forma de quatérnions. Vemos abaixo, as duas formas utilizadas por Maxwell para exprimir a lei de Ampère utilizadas no *Treatise*:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}, \end{aligned}\right\} \text{(Equations of Electric Currents.)}$$

$$4\pi\mathfrak{C} = V.\nabla\mathfrak{H}$$

que, utilizando o formalismo vetorial moderno, pode ser escrita como $\nabla \mathrm{x} \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{J}$ .

O uso do novo método em seu livro é freqüente e poderia ter sido maior ainda se os leitores da época conhecessem mais o método dos quatérnions. O uso que Maxwell fez de expressões na forma de quatérnions e sua notação foi suficiente para incentivar vários leitores a estudar o método. A leitura do livro de Maxwell deixa a impressão de que ele está recomendando fortemente ao leitor um estudo mais aprofundado sobre os quatérnions. Entre os que se interessaram pelos quatérnions estão Gibbs e Heaviside.

## GIBBS E HEAVISIDE

O interesse em eletricidade e magnetismo levou, independentemente, Gibbs e Heaviside ao *Treatise* de Maxwell. O uso freqüente dos quatérnions nesta obra despertou-lhes o interesse em estudá-los nas obras de Hamilton e Tait. Gibbs e Heaviside introduziram, independentemente, mudanças no cálculo de quatérnions através de simplificações e mudanças, criando assim um novo formalismo matemático – a análise vetorial.

Gibbs publicou entre 1881 e 1884 o livro *Elements of vector analysis* (GIBBS, 1961), no qual, como Hamilton e Tait, usa letras gregas minúsculas para designar vetores, letras romanas minúsculas para designar escalares e *i, j, k* para designar “sistema de vetores unitários normais” paralelos aos eixos X, Y, Z (GIBBS 1961, p. 20). Define as operações de soma, subtração e produto entre dois vetores. Diferentemente do cálculo de quatérnions que possui apenas um tipo de produto, Gibbs define dois produtos distintos: o “produto direto” escrito como $\alpha.\beta$ e o “produto torcido” escrito como $\alpha\times\beta$ dados respectivamente por

$\alpha.\beta = xx' + yy' + zz'$ e
$\alpha\times\beta = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - yx')k.$

Como vemos, esses produtos correspondem à parte escalar do produto entre dois quatérnions com o sinal positivo, isto é, $\alpha.\beta = -S\alpha\beta$ e à parte vetorial do produto entre dois quatérnions, isto é, $\alpha\times\beta = V\alpha\beta$. Além disso, o produto escalar obedece a propriedade comutativa enquanto que o produto vetorial não.

Nos capítulos II e IV do *Elements of vector analysis*, Gibbs trabalha com o operador ∇ da mesma forma que Hamilton e Tait, mas considera que o operador ∇ pode ser aplicado a uma função vetorial ω na forma de produto escalar ou de produto vetorial separadamente:

$$\nabla.\omega = i.\frac{d\omega}{dx} + j.\frac{d\omega}{dy} + k.\frac{d\omega}{dz} \text{ e}$$

$$\nabla \times \omega = i \times \frac{d\omega}{dx} + j \times \frac{d\omega}{dy} + k \times \frac{d\omega}{dz}$$

chamados respectivamente de "divergência" de ω e "rotacional" de ω (GIBBS, 1961, p. 31).

A principal crítica dos defensores dos quatérnions ao sistema de Gibbs é a existência de dois produtos separados – produto escalar e vetorial – e também o sinal positivo do produto escalar. O produto completo (soma da parte escalar com a vetorial) para o sistema de quatérnions era vista como uma questão de princípios pois seu abandono significa deixar de ver um quatérnion como entidade fundamental.

Ao contrário de Gibbs, Heaviside nunca escreveu um tratado formal sobre análise vetorial. As noções que desenvolveu sobre vetores e suas relações foram introduzidas em seus artigos sobre eletromagnetismo escritos a partir de 1882 e 1891, reunidos depois em dois volumes chamados *Electrical Papers*. O estudo destes artigos nos mostra como a visão de Heaviside sobre os quatérnions mudou com o passar do tempo, passando de uma simpatia para uma extrema antipatia.

Inicialmente, em 1882, Heaviside elogiou os quatérnions, afirmando que são muito mais simples que o formalismo de componentes (HEAVISIDE, 1970, vol. I, p. 199). Apesar disso, apontou alguns defeitos no sistema de quatérnions, como por exemplo, a dificuldade para entender suas idéias, a pequena utilidade prática do produto completo entre quatérnions e também a notação, particularmente o uso de vários prefixos (como S e V para representar os tipos de produto).

Nestes artigos, Heaviside apresentou as idéias do sistema vetorial aplicando-a diretamente a problemas físicos relevantes da época, como eletromagnetismo e hidrodinâmica. Por exemplo, explica o significado do rotacional de um vetor, aplicando-o para mostrar que a "corrente **C** = 4π x rotacional da força magnética"; define o produto escalar ao discutir indutância mútua entre dois circuitos de corrente; e outros.

No ano seguinte (1883), Heaviside dedicou uma seção do artigo "Some electrostatic and magnetic relations" ao operador ∇ e suas aplicações da mesma forma que Tait e os quaternionistas, ou seja, o resultado é a soma da convergência (que tem sinal negativo) com o rotacional. Além disso, usou as mesmas regras para o produto entre os vetores unitários que havia atacado tão ferozmente em trabalhos posteriores:

> Seja o vetor $\mathbf{R} = Xi + Yj + Zk$ e a expressão completa de ∇
>
> $\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}$, então
>
> $\nabla\mathbf{R} = \left(i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}\right)(Xi + Yj + Zk)\cdot$
>
> Usando a convenção $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, obtemos
>
> $\nabla\mathbf{R} = -\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) + i\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + j\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + k\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dz}\right),$
>
> isto é,

$\nabla\mathbf{R}$ = conv **R** + curl **R**. (HEAVISIDE, 1970, vol. I, p. 271)

Heaviside acrescentou uma nota de rodapé na republicação deste artigo no *Electrical papers*, afirmando que foi apenas neste artigo que usou as idéias e notações dos quatérnions e que queria enfatizar que o uso foi dispensável. O artigo foi escrito em 1883 e reeditado no *Electrical papers* em 1892, mostrando que a controvérsia fez Heaviside tentar mudar a importância dos quatérnions para sua álgebra vetorial e também em seus escritos sobre eletromagnetismo.

Como Tait e Hamilton, Heaviside também associou *i, j, k* a rotações:

> Para os quadrados podemos verificar que $i^2 = -1$ assim: rode *j* de 90° duas vezes ao redor do eixo x. A primeira rotação faz *j* coincidir com *k* e a segunda o leva a coincidir com a primeira linha mas em sentido contrário. (HEAVISIDE 1970, vol. I, p. 271)

A primeira apresentação completa de seu sistema apareceu em 1885 em um artigo publicado na *Philosophical Magazine* (HEAVISIDE 1970, vol. II, pp. 1-23). Neste artigo, Heaviside ainda se refere a seu formalismo como método de quatérnions (porém com as equações escalares escritas separadamente das vetoriais). Suas críticas aos quatérnions ainda eram gentis, tanto que apresentou seu sistema como um meio termo entre os métodos cartesianos abreviados e o de quatérnions.

Para Heaviside, os quatérnions já seriam usados inconscientemente pelos físicos ao abreviarem as equações cartesianas. Isso é uma interpretação errada dos quatérnions, pois não leva em conta que eles são, por definição, formados por uma parte escalar e outra vetorial e estão relacionados a rotações. Ao afirmar isto, Heaviside já está simplificando os quatérnions e interpretando-os como vetores. De fato, esta é uma modificação natural que também foi utilizada por Tait e Maxwell, apesar de ser conceitualmente problemática.

As mudanças de opinião em relação à aceitação dos quatérnions começam a aparecer no prefácio do *Electrical papers* publicado em 1891, onde Heaviside nega a influência dos quatérnions sobre seu sistema que seria "de um tipo rudimentar, sem ter nada a ver com os quatérnions. É simples, fácil de ser entendido e está em harmonia com a álgebra cartesiana pois a passagem de uma para outra não envolve mudança de sinal" (HEAVISIDE 1970, vol. I, p. xi).

O primeiro volume do livro *Electromagnetic theory* de Heaviside, publicado entre 1893 e 1912, é o mais importante para a história da análise vetorial pois contém suas novas opiniões sobre quatérnions e um tratamento extensivo da análise vetorial, inclusive com exemplos aplicados na teoria eletromagnética. O estilo agressivo de Heaviside pode ser visto em seus comentários sobre quatérnions na seção "O caráter enigmático dos quatérnions e a simplicidade comparativa ganha ao ignorá-los", na qual começa chamando Tait de "metapsicomatemático" e diz que ao ler o tratado de Tait sentiu "sobre seus ombros o velho homem do mar quaterniônico". Sobre os quatérnions, disse que são não apenas dispensáveis, mas também um "demônio de magnitude inconsiderável". Nesta época, Heaviside passa a negar totalmente a influência dos quatérnions em sua obra ao afirmar que "não há um fantasma de nenhum quatérnion em meus artigos". Segundo ele, sua análise vetorial pode ser descrita como uma abreviação conveniente da análise cartesiana, ou como "quatérnions sem quatérnions" (HEAVISIDE 1971, vol. I, pp. 134-135).

Apesar de ter negado veementemente em 1883 e durante a controvérsia qualquer influência dos quatérnions sobre seu sistema, vimos que Heaviside utilizou os quatérnions, tanto que em 1912 Heaviside explicitou como utilizou quatérnions para elaborar seu sistema vetorial: "Então joguei fora o quatérnion completo e mantive os escalares puros e vetores, usando uma álgebra vetorial muito simples em meus artigos de 1883 em diante" (HEAVISIDE 1971, vol. II, p. 136).

Agora resta saber por que Heaviside se tornou um adversário tão agressivo dos quatérnions e chegou a negar qualquer influência dos mesmos sobre o cálculo de vetores, sendo que as influências são enormes, já que o cálculo de vetores é uma simplificação dos quatérnions, como o próprio Heaviside afirmou.

Uma hipótese para explicar esta mudança tão drástica é que, durante a controvérsia, Heaviside sentiu a necessidade de distanciar seu sistema dos quatérnions para que as pessoas notassem que tinha desenvolvido um sistema novo e independente. Talvez Heaviside também não tivesse notado de imediato que estava criando um novo sistema pois, para ele, estava fazendo apenas uma simplificação nos quatérnions para usá-los mais facilmente na física. Somente durante a controvérsia percebeu que tinha em mãos um sistema matemático novo e que deveria ser promovido entre os físicos, juntamente com o sistema de Gibbs, que era muito semelhante ao seu.

A tabela abaixo mostra exemplos das notações utilizadas no *Elements of vector analysis* por Gibbs, no *Electromagnetic theory* de Heaviside, no *Treatise on electricity and magnetism* de Maxwell e no *Treatise on quaternions* de Tait, mostrando que os quatro trabalhos são similares no simbolismo empregado e nas idéias matemáticas que expressam. Isso pode ser explicado pela hipótese que Gibbs e Heaviside partiram de Maxwell para estudar a análise de quatérnions na obra de Tait e, ao escreverem sobre análise vetorial, simplificaram os conteúdos desenvolvidos por Tait e Hamilton.

| **HAMILTON e TAIT 1843 e 1867** | **MAXWELL 1873** | **GIBBS 1881** | **HEAVISIDE 1883** |
|---|---|---|---|
| $\alpha = xi + yj + zk$ | $\Im = iX + jY + kZ$ | $\alpha = xi + yj + zk$ | $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ |
| $\alpha\beta = S\alpha\beta + V\alpha\beta$ | | | |
| $S\alpha\beta = -(xx' + yy' + zz')$ | $S\,BH = -(xx' + yy' + zz')$ | $\alpha.\beta = +(xx' + yy' + zz')$ | $\mathbf{AB} = +(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$ |
| $V\alpha\beta = (yz'-zy')i + (zx'-xz')j + (xy'-yx')k$ | $VAB = (yz'-zy')i + (zx'-xz')j + (xy'-yx')k$ | $\alpha\times\beta = (yz'-zy')i + (zx'-xz')j + (xy'-yx')k$ | $\mathbf{Vab} = \mathbf{i}(a_2b_3-a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1)$ |
| $\nabla\omega = S\nabla\omega + V\nabla\omega$ | | | $\nabla\mathbf{R} = \text{conv }\mathbf{R} + \text{curl.}\mathbf{R}$ * |
| $S\nabla\omega$ | $S\,.\,\nabla\omega = \text{conv }\omega$ | $\nabla.\omega$ | $\text{div }\mathbf{D} = \nabla\mathbf{D}$ ** |
| $V\nabla\omega$ | $V\,.\,\nabla\omega = \text{curl }\omega$ | $\nabla \text{ x } \omega$ | $\text{curl }\mathbf{E} = V\nabla\mathbf{E}$ |
| $\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)$ | $\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)$ | $\nabla.\nabla = +\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)$ | $\nabla^2 = +\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)$ |

## CONCLUSÃO

Maxwell associou as idéias vetoriais com eletricidade e magnetismo tornando imprescindível o desenvolvimento de algum tipo de análise vetorial no final do século XIX. Considerou o sistema de quatérnions como adequado para tratar as grandezas vetoriais, porém com algumas alterações, tais como o uso apenas da parte vetorial de um quatérnion e a separação entre a parte escalar e vetorial do

* Heaviside usou esta equação em 1883, mas mudou no *Electromagnetic Theory* de 1891.
** No artigo “Some electrostatic and magnetic relations” de 1883, usou conv **D** que é igual a –div **D**.

produto. Introduziu essas alterações de uma maneira natural pensando estar usando os quatérnions da mesma forma que Tait usaria e não com o objetivo de abrir caminho para uma nova análise vetorial.

Gibbs e Heaviside também tiveram uma atitude parecida. A transformação do sistema de quatérnions para o sistema vetorial não foi proposital e ninguém percebeu que os quatérnions estavam sendo abandonados até que Gibbs escreveu um tratado formal para apresentar a nova álgebra vetorial que não tinha vários conceitos existentes nos quatérnions, além de ter uma nova notação. De uma maneira geral, Maxwell, Gibbs e Heaviside não estavam tentando construir um novo sistema matemático. O que eles queriam era tornar o sistema de Hamilton mais simples e mais fácil de ser usado em Física.

Comparando os dois sistemas, vemos que a simplicidade do sistema de Gibbs-Heaviside é matematicamente questionável. Ambos não são comutativos, já que o produto vetorial não é comutativo; no sistema de quatérnions só existe um produto, enquanto que no sistema vetorial são definidos dois produtos. O sistema de quatérnions permite a divisão, mas na análise vetorial a divisão não é unívoca. O sistema de Gibbs-Heaviside pode ser mais fácil de ser usado por ter uma notação mais clara e ser menos geral, mas não podemos dizer que ele é matematicamente mais simples.

A controvérsia sobre a presença do sinal negativo é defendida pelos quaternionistas como uma questão de elegância algébrica, simplicidade e naturalidade, enquanto que os adeptos da análise vetorial argumentam em termos mais pragmáticos. Apesar de esta questão ser legítima ela é matematicamente impossível de ser solucionada pois é possível desenvolver formalismos coerentes adotando qualquer uma das duas alternativas.

Os defensores dos quatérnions não apresentaram argumentos novos durante o debate e também não apresentaram novas aplicações físicas para os quatérnions, numa época em que Heaviside estava publicando vários trabalhos sobre a teoria eletromagnética usando seu novo sistema vetorial. Os quaternionistas estavam mais preocupados em preservar o sistema de Hamilton que em desenvolver novas aplicações para ele. Tait demonstrou uma falta de interesse em responder às críticas feitas ao sistema, provavelmente por julgar que os quatérnions eram um sistema tão bom que dispensava maiores comentários, principalmente dirigidos a interlocutores pouco conhecidos na época como Gibbs e Heaviside.

Tanto Gibbs quanto Heaviside tinham um pé na matemática e outro na física. Essa interessante mistura levou-os a introduzir simplificações no método dos quatérnions que diminuíram sua aparência de sistema puramente matemático. Um grande ponto a favor da aceitação dos vetores entre os físicos e engenheiros da época foi a forma de apresentação do sistema: as definições foram feitas usando vetores que representam grandezas físicas e foram aplicadas imediatamente a problemas emergentes na época, tornando os conceitos mais interessantes e atraentes. Essa estratégia usada por Heaviside é bem mais eficiente que a usada por Tait ao apresentar os quatérnions no *An elementary treatise on quaternions*, que apresenta todo o sistema formalmente e acrescenta alguns exemplos físicos no final.

O fato de os defensores da análise vetorial conseguirem obter resultados físicos novos não significa que seu sistema seja superior, mas certamente isso contribui para tornar o sistema atraente para o público interessado no uso da álgebra vetorial para resolver problemas físicos. De uma maneira geral, podemos dizer que a estratégia usada pelos defensores da álgebra vetorial, particularmente por Heaviside, contribuiu muito mais para sua aceitação do que as qualidades do sistema propriamente ditas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORK, Alfred M. "Vector versus quaternions": The letters in *Nature*. *American Journal of Physics* **34:** 202-11, 1966.

CROWE, J. M. *A history of vector analysis, the evolution of the idea of a vectorial system*. London: Universty of Notre Dame Press, 1967.

GIBBS, Josiah Willard. *The scientific papers of J. Willard Gibbs*. Vol. 2. New York: Dover, 1961.

HAMILTON, William Rowan. *Elements of quaternions*. New York: Chelsea Publishing Company, 1969.

———. *The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton. Vol. 3: Algebra*. Edited for the Royal Irish Academy by A.W. Conway and J. L. Synge. Cambridge: University Press, 1967.

HEAVISIDE, Oliver. *Electrical papers*. New York: Chelsea Publishing Company, 1970.

———. *Electromagnetic theory*. New York: Chelsea Publishing Company, 1971.

MAXWELL, James. C. *Treatise on electricity and magnetism*. New York: Dover, 1954.

———. *The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell* Vol. II. 1862-1873, edited by P. M. Harman. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

NAHIN, Paul J. *Oliver Heaviside: sage in solitude*. New York: IEEE Press, 1988.

O'BRIEN, Matthew. On symbolic forms derived form the conception of the translation of a directed magnitude. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **142:** 161-206, 1852.

SILVA, Cibelle Celestino; MARTINS, Roberto de A. Polar and axial vectors versus quaternions. *American Journal of Physics* **70:** 958-63, 2002.

STEPHENSON, Reginald J. Development of vector analysis from quaternions. *American Journal of Physics* **34:** 194-201, 1966

TAIT, Peter G. *An elementary treatise on quaternions*, 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1873.

WHITTAKER, E. T. *A history of the theories of aether and eletricity*. New York: Humanities Press, 1973.