O FORMALISMO MATEMÁTICO USADO POR EINSTEIN NA RELATIVIDADE ESPECIAL: UMA ANÁLISE CRÍTICA

Cibelle Celestino Silva
IFSC, USP, cibelle@ifsc.usp.br

Resumo Este trabalho analisa criticamente o formalismo matemático usado por Einstein, bem como os outros formalismos disponíveis na época. É dada especial atenção ao contexto da época e aos trabalhos desenvolvidos pelos contemporâneos de Einstein e por ele estudados.

Introdução

Quando James Clerk Maxwell (1831-1879) formulou sua teoria eletromagnética da luz na segunda metade do século XIX, as equações básicas eram consideradas como válidas em relação a um referencial especial – aquele que estava em repouso em relação ao éter. Quando essas equações eram transformadas para um referencial em movimento em relação ao éter, surgiam novos termos, que pareciam indicar a possibilidade de detectar, através de experimentos, o movimento da Terra através do éter. Desta forma, no final do século XIX, um dos principais problemas da física a ser resolvido era a determinação do movimento relativo entre a Terra e o éter.

Durantes os primeiros anos do século XX, Henri Poincaré (1854-1912) estabeleceu o “princípio da relatividade”, de acordo com o qual as equações que descrevem fenômenos físicos (incluindo as equações de Maxwell) são covariantes, isto é, não mudam de forma, quando escritas em um novo referencial. Uma das questões mais estudadas pelos físicos teóricos da época era como escrever as equações do eletromagnetismo de modo a manter a covariência das mesmas. No final do século XIX e início do século XX, Joseph Larmor (1857-1942), Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), Henri Poincaré e Albert Einstein (1879-1955) desenvolveram um novo formalismo para o eletromagnetismo, tornando-o compatível com o princípio da relatividade pela introdução das “transformações de Lorentz”[1].

---

[1] WHITTAKER, *A history of the theories of aether and electricity*, vol. 2, capítulo 2.

Atualmente, na teoria eletromagnética relativística, o campo eletromagnético pode ser representado por um tensor quadridimensional antissimétrico $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ de segunda ordem (μ, ν = 0, 1, 2, 3), cujas componentes estão associadas às componentes do campo elétrico **E** e da indução magnética **B**:[2]

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

As componentes desse tensor do campo eletromagnético podem ser calculadas a partir do quadrivetor potencial do campo eletromagnético[3] $\mathbf{A}_\mu = (\phi, A_x, A_y, A_z)$:

$$F_{\mu\nu} = \partial A_\mu/\partial x_\nu - \partial A_\nu/\partial x_\mu \tag{2}$$

que permite escrever as equações de Maxwell de uma forma extremamente elegante e compacta, em quatro dimensões, utilizando o quadrivetor densidade de corrente $\mathbf{j}_\mu = (\rho, j_x, j_y, j_z)$:

$$\Box^2 A_\mu = j_\mu /\varepsilon_0 \quad \text{e} \quad \partial j_\mu/\partial x_\nu = 0 \tag{3}$$

Essa notação condensa um grande número de propriedades dos campos elétrico e magnético, tais como a transformação relativística entre esses campos, que permite, por exemplo, deduzir o campo eletromagnético de uma carga em movimento, dado seu campo (eletrostático) em repouso. O tensor incorpora as propriedades de simetria do campo elétrico e do campo magnético, já que esse tensor em quatro dimensões pode ser considerado como composto por um vetor tridimensional polar (campo elétrico) e por um pseudo-vetor (vetor axial) tridimensional ou tensor antissimétrico espacial (campo magnético).[4] Desse tensor se obtém a existência de dois invariantes do campo

---

[2] A representação aqui utilizada assume **c** = 1 (JACKSON, *Classical electrodynamics*, p. 550; FEYNMAN et al., *Lectures on physics*, v. 2, p. 26-6). Em outros livros, pode aparecer o fator **c**. Além disso, os sinais dos elementos desse tensor podem variar dependendo das convenções utilizadas, e podem aparecer fatores multiplicados por **i**, conforme a notação adotada para a quarta coordenada relativística. Ver, por exemplo, LANDAU & LIFCHITZ, *Théorie du champ*, p. 79; MØLLER, *The theory of relativity*, p. 147.

[3] Continuamos a adotar **c**=1 (FEYNMAN et al., *Lectures on physics*, v. 2, pp. 25-6 a 25-9 e 26-5). Dependendo do sistema de unidades adotado, aparecem diferentes constantes nessas equações.

[4] Nem todos os autores chamam a atenção dos leitores para esse aspecto. O tipo de simetria dos campos elétrico e magnético é apontado por MØLLER, *The theory of relativity*, p. 147; JACKSON, *Classical electrodynamics*, pp. 248-9; LANDAU & LIFCHITZ, *Théorie du champ*, p. 79.

eletromagnético, sendo um deles um escalar (**$B^2–E^2$ = inv**.) e o outro um pseudo-escalar (**E•B = inv**.).[5]

Em geral, ao fazermos a transformação dos campos para um novo referencial, utilizamos dois referenciais S e S' cujo movimento relativo é na direção x. Nesse caso, a transformação dos campos é:

$$B'_1 = B_1 \qquad B'_2 = \gamma(B_2 + vE_3/c) \qquad B'_3 = \gamma(B_3 - vE_2/c)$$
$$E'_1 = E_1 \qquad E'_2 = \gamma(E_2 - vB_3/c) \qquad E'_3 = \gamma(E_3 + vB_2/c)$$

Podemos escrever essas transformações considerando uma velocidade relativa **v** qualquer entre os dois referenciais, e neste caso a equação geral é:

$$\mathbf{E}' = \gamma\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\mathbf{v}}{c}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{E}\right) \qquad (4)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{E}\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{\mathbf{v}}{c}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{B}\right) \qquad (5)$$

Esse formalismo matemático, desenvolvido no início do século XX, é considerado o mais adequado para representar a teoria eletromagnética de Maxwell sob forma relativística. Muitos estudos históricos sobre o tema (desenvolvidos por historiadores da ciência profissionais ou não) tendem a enfatizar os aspectos falhos das teorias anteriores a Einstein e venerar a simplicidade maravilhosa introduzida pelos conceitos revolucionários de espaço-tempo introduzido por ele. Mas será que a história foi tão simples assim? Será que em 1905 a teoria de Einstein era obviamente tão superior que seus contemporâneos só podem ser vistos como cegos ou conservadores? Muitas autores atribuem a Einstein um importante papel no desenvolvimento da teoria da relatividade restrita de forma explícita e implicitamente também propagam a idéia de que Einstein teve um importante papel no desenvolvimento do formalismo matemático usado, ou mesmo que ele usava o formalismo atual. Mas quais foram as etapas que levaram a esse formalismo, e quais as contribuições de Einstein para seu desenvolvimento? Estes são os temas estudados neste trabalho.

Lorentz e a eletrodinâmica dos corpos em movimento

[5] Ver LANDAU & LIFCHITZ, *Théorie du champ*, p. 83; BECKER, *Electromagnetic fields and interactions*, p. 347.

Lorentz publicou vários trabalhos estudando a eletrodinâmica dos corpos em movimento.[6] Vamos nos concentrar no artigo publicado em 1904, *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less that of light*.[7] As premissas básicas deste trabalho são: as equações de campo para o éter estacionário e a força de Lorentz; a hipótese que uma translação global do sistema altera todas as forças como se elas tivessem origem eletromagnética; que um elétron em movimento se contrai longitudinalmente a uma taxa $\gamma^{-1} = (1 - v^2 / c^2)^{1/2}$; que todas as massas têm origem eletromagnética. A partir dessas hipóteses, Lorentz concluiu que os fenômenos ópticos não dependem do movimento de translação uniforme do sistema em qualquer ordem de v/c e também deduziu expressões para as massas longitudinal e transversal do elétron.[8]

Inicialmente Lorentz transformou as equações do campo eletromagnético de um sistema S em repouso com relação ao éter para um sistema inercial S' movendo-se com $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ com relação a S, usando as transformações de Galileu, mostrando que essas equações não mantêm a mesma forma. A seguir, viu que para manter a forma das equações invariante no novo sistema que se move com relação ao éter, seria necessário escrever as equações no novo sistema de coordenadas S' obtido através da transformação:[9]

$$x' = \beta l x,\quad y' = l y,\quad z' = l z,\quad t' = t l/\beta - l\beta(v/c^2)x, \tag{6}$$

onde $\beta^2 = \dfrac{c^2}{c^2 - v^2}$ e l é uma quantidade numérica a ser determinada. Quando v = 0, o valor de l é igual a 1. Lorentz supôs que, para valores pequenos de v, ela difere da unidade em segunda ordem.[10]

Lorentz considerava essas transformações como uma ferramenta matemática e a interpretava apenas como uma transformação de coordenadas. Apesar de considerar que a coordenada temporal também se altera em uma mudança de referencial, Lorentz não a

[6] Não vamos discutir os esforços de Lorentz em explicar a ausência de efeitos do movimento dos corpos em relação ao éter nem sua teoria de elétrons. Para isso veja WHITTAKER 1973, MILLER 1981 e DARRIGOL 2000.
[7] LORENTZ 1952, pp. 11-34.
[8] DARRIGOL 2000, p. 362.
[9] LORENTZ 1952, p. 14.
[10] Em 1892, Lorentz havia obtido um conjunto de transformações de coordenadas ligeiramente diferente pois seguiu um caminho diferente, introduzindo um sistema de coordenadas intermediário S_r, como discute MILLER 1981, p. 27-29. A forma adotada posteriormente para essas transformações foi obtida por Poincaré.

considerou como uma coordenada do mesmo tipo que as coordenadas espaciais e não utilizou nenhuma idéia semelhante a um "espaço-tempo". Esse enfoque foi introduzido logo depois por Poincaré.[11]

As contribuições de Henri Poincaré

Henri Poincaré fez importantes contribuições para a teoria da relatividade em seu trabalho *Sur la dynamique de l'électron* publicado de forma resumida em 1905 e completamente em 1906.[12] Poincaré terminou este artigo um pouco antes do trabalho de Einstein datado de 30 de junho de 1905, publicado em setembro. Neste trabalho, Poincaré analisou as propriedades de transformação de muitas grandezas físicas, deu o tratamento completo da covariância das equações de Maxwell, introduziu quadrivetores e a tensão de Poincaré e provou o caráter de grupo das "transformações de Lorentz", introduzindo este nome e o nome "grupo de Lorentz":[13]

> A idéia de Lorentz pode ser resumida como se segue: sem modificar nenhum fenômeno aparente, se uma translação comum é imposta para todo o sistema, então as equações eletromagnéticas não são alteradas sob certas transformações, que chamaremos *transformações de Lorentz*. Dois sistemas, um imóvel e outro transladando-se, tornam-se a imagem exata um do outro.

As transformações de coordenadas utilizadas por Poincaré são[14]

$$x' = kl\,(x + \varepsilon t),\quad y'=yl,\quad z'=zl,\quad t'=kl(t + \varepsilon x), \tag{7}$$

onde l e ε são inicialmente descritas como duas constantes quaisquer e $k = \dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

---

[11] MILLER 1981, pp. 216-17.
[12] POINCARÉ 1906. Sobre as contribuições de Poincaré veja também os artigos GOLDBERG 1967 e CUJAV 1968.
[13] POINCARÉ 1906, p. 495.
[14] POINCARE 1906, p. 499

Em todo seu artigo, ε e l são constantes quaisquer a serem determinadas. Poincaré manteve a constante l com um valor qualquer, até encontrar uma justificativa para afirmar que l deveria ser igual a 1. Mostrou que apenas para $l = 1$, as equações de Maxwell são covariantes sob transformações de Lorentz.[15]

Entre as inovações de Poincaré, está a introdução de uma quarta coordenada imaginária it, equivalente às três coordenadas espaciais, antecipando o trabalho de 1908 de Minkowski:[16]

> Vamos considerar x, y, z, it; δx, δy, δz, $i\delta t$; [...] como coordenadas de dois pontos em um espaço de quatro dimensões. Vemos que a transformação de Lorentz é exatamente uma rotação deste espaço em torno da origem, considerada fixa. Devemos ter também como invariantes apenas [...] as distâncias entre esses pontos e a origem ou, se preferirem, $x^2+y^2+z^2-t^2$, $x\delta x+y\delta y+z\delta z-t\delta t$, e $\delta x^2+\delta y^2+\delta z^2-\delta t^2$.

Poincaré dedicou uma seção de seu trabalho para mostrar que o conjunto das transformações de Lorentz forma um grupo, mostrando que duas transformações de Lorentz sucessivas podem ser substituídas por uma única transformação do mesmo tipo.[17] Poincaré interpretou as transformações de Lorentz como rotações ao redor da origem no espaço quadridimensional e mostrou a invariância da soma dos quadrados das coordenadas ($x^2 + y^2 + z^2 - t^2$), interpretada como uma medida de distância no espaço quadridimensional. Desta forma, Poincaré uniu as transformações de Lorentz com a teoria dos invariantes.

Poincaré obteve a transformação correta para a densidade de carga e de corrente, mostrou como uma velocidade e uma aceleração se transformam e também considerou a transformação de um elemento de volume do espaço. Com isso, as equações de Maxwell são rigorosamente invariantes sob transformações de Lorentz.

Poincaré usou os invariantes do grupo de Lorentz como uma ferramenta poderosa e conveniente. Em seus cálculos do campo de um elétron acelerado, Poincaré foi o primeiro a

[15] POINCARÉ 1906, pp. 535-36.
[16] POINCARÉ 1906, p. 542. Poincaré não utilizou o termo quadrivetor para designar este novo ente matemático.
[17] POINCARÉ 1906, pp. 513-15.

usar a simplificação da transformação de Lorentz para o referencial em repouso da partícula. O campo do elétron foi obtido pela transformação do campo eletrostático no referencial em repouso. O campo magnético que aparece no referencial em movimento é perpendicular à velocidade e ao campo elétrico. Para generalizar esses resultados, Poincaré provou a invariância das propriedades que mantém os campos elétrico e magnético perpendiculares em uma onda eletromagnética transversal, que em notação moderna são escritas como $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$, $\mathbf{E.B} = 0$, $\mathbf{E.x} = 0$ e $\mathbf{B.x} = 0$. No formalismo de componentes usado por Poincaré essas expressões são escritas como[18]

$$
\begin{aligned}
&(\Sigma f^2 - \Sigma\alpha^2) = (\Sigma f'^2 - \Sigma\alpha'^2),\\
&\Sigma f\alpha = \Sigma f'\alpha',\\
&\Sigma f'(x'-x'_1) = 0 \text{ e}\\
&\Sigma\alpha'(x'-x'_1) = 0
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

Em linhas gerais, em seus trabalhos de 1905 e 1906, Poincaré mostrou que o conjunto das transformações de Lorentz forma um grupo e que essa propriedade é necessária para descartarmos o movimento absoluto e com isso resguardar o princípio da relatividade dos movimentos uniformes. Ele conseguiu unir as transformações de Lorentz com a teoria dos invariantes e foi o primeiro a representar a coordenada temporal como uma quarta dimensão imaginária no espaço. Foi sobre esses princípios que Minkowsky elaborou em 1908 sua teoria de espaço-tempo.

O formalismo quadridimensional de Minkowski

A motivação principal do trabalho de Minkowski sobre eletrodinâmica era investigar sistematicamente as conseqüências lógicas de se assumir a validade universal da covariância de Lorentz utilizando o formalismo quadridimensional. Minkowski publicou dois artigos fundamentais para o desenvolvimento do formalismo quadridimensional do eletromagnetismo. Em 1908 Minkowski apresentou o artigo *Grundgleichngen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern* (As equações fundamentais dos

[18] POINCARÉ 1906, pp. 518-520.

fenômenos eletromagnéticos dos corpos em movimento).[19] Neste trabalho Minkowski desenvolveu seu formalismo quadridimensional na forma matricial e o aplicou para mostrar que as equações da eletrodinâmica se mantêm invariantes sob transformações de Lorentz. O segundo trabalho que nos interessa, *Raum und Zeit* (Espaço e tempo), também foi publicado 1908, seis meses após o primeiro e é mais conhecido, tendo sido traduzido para o inglês. Nestes trabalhos, Minkowski aplicou o formalismo quadridimensional na teoria eletromagnética utilizando o postulado da covariância das leis físicas sob transformações de Lorentz e discutiu aspectos geométricos associados ao novo formalismo quadridimensional.

Em seu artigo “As equações básicas dos processos eletromagnéticos dos corpos em movimento” Minkowski incorporou as idéias relativísticas de Einstein, Poincaré e Planck. Ele percebeu que as transformações de Lorentz formam um grupo e que as equações de Maxwell são covariantes em relação a este grupo. Compartilhou as idéias de Poincaré sobre as transformações de Lorentz representarem uma rotação num espaço quadridimensional com uma coordenada imaginária. Minkowski desenvolveu e apresentou um enfoque original para as equações de Maxwell-Lorentz, a eletrodinâmica dos corpos em movimento e em um apêndice, a mecânica covariante de Lorentz.

No artigo de 1908, Minkowski escreveu as equações da eletrodinâmica usando o formalismo de quadrivetores, no qual considerou que as grandezas eletromagnéticas são funções de x_1, x_2, x_3, x_4. Como exemplos, definiu o vetor densidade de corrente quadridimensional e escreveu as equações de Maxwell usando o formalismo quadridimensional na forma de componentes.[20]

Os campos elétrico (e_x, e_y, e_z) e magnético (m_x, m_y, m_z) são escritos como seis componentes de uma matriz antissimétrica 4×4, da seguinte forma:[21]

$$f_{23},\ f_{31},\ f_{12},\ f_{14},\ f_{24},\ f_{34},$$

com

$$m_x,\ m_y,\ m_z,\ -ie_x,\ -ie_y,\ -ie_z,$$

sendo que $f_{kh} = -f_{hk}$. Assim, a matriz que representa o campo eletromagnético é escrita como[22]

[19] MINKOWSKI 1910. Neste trabalho usaremos a reedição deste artigo na revista *Mathematische Annalen* em 1910.

[20] MINKOWSKI 1910, p. 476.

[21] Minkowski usa c = 1, portanto a induçao magnética é igual ao campo magnético.

$$
f = \begin{vmatrix} 0 & m_z & -m_y & -ie_x \\ -m_z & 0 & m_x & -ie_y \\ m_y & -m_x & 0 & -ie_z \\ -ie_x & -ie_y & -ie_z & 0 \end{vmatrix} \tag{9}
$$

Quando Minkowski escreveu o campo eletromagnético na forma da matriz dada pela equação (9), já tinha em mente outra propriedade física dos campos: o fato de um campo elétrico poder gerar um campo magnético, e vice-versa, quando há mudança de um referencial em repouso para um referencial em movimento. O formalismo matemático usado para descrever os campos deve permitir que haja uma "mistura" entre as componentes dos campos.

Vários contemporâneos viram no formalismo de Minkowski um novo enfoque para o princípio da relatividade. As quatro equações da eletrodinâmica escritas com o formalismo de Minkowski foram entendidas por Max von Laue e outros como um resumo de toda a eletrodinâmica. A reformulação do formalismo vetorial e tensorial do cálculo de Minkowski e a defesa de teóricos como Sommerfeld[23] e Abraham[24], contribuíram para que o formalismo de espaço-tempo ganhasse a confiança entre os físicos da época. Além da influência de teóricos importantes da época, também havia a aparente superioridade do formalismo de espaço-tempo sobre a análise vetorial ou o método de componentes.

Algum tempo após sua estréia, o formalismo de Minkowski ganhou a preferência entre os teóricos da relatividade. Após a sua morte em 1909, físicos com habilidades matemáticas transformaram seu cálculo de matrizes em uma análise vetorial e tensorial com aplicações imediatas na teoria eletromagnética, termodinâmica, dinâmica dos gases, teoria quântica, teoria elástica, dinâmica e cinemática do corpo rígido.[25]

Einstein e o formalismo quadridimensional

[22] Minkowski usava barras paralelas para representar matriz.
[23] SOMMERFELD 1910
[24] ABRAHAM 1910.
[25] WALTER 1999, p. 120.

O nome de Einstein é imediatamente associado à teoria da relatividade. Apesar de sua importância para o desenvolvimento da teoria, Einstein não fez grandes contribuições para o desenvolvimento do formalismo matemático usado na relatividade especial.

Seu trabalho *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* no qual expõe suas idéias sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento e sobre a importância da invariância das leis físicas sob transformações de Lorentz, foi publicado em 1905, portanto 3 anos antes que os trabalhos de Minkowski.[26] Neste trabalho, Einstein não considera o tempo como uma coordenada imaginária e utiliza o formalismo de componentes para escrever as grandezas vetoriais.

Einstein não interpretou as transformações de Lorentz como rotações no espaço quadridimensional e também não pensou que elas pudessem estar associadas a algo mais geral, como por exemplo, a existência de invariantes neste espaço. Para ele, as transformações de Lorentz eram apenas as transformações de coordenadas necessárias para que as equações de Maxwell fossem invariantes, neste sentido, eram as transformações que davam o resultado desejado.

Além disso, não discute as diferenças entre as propriedades de simetria dos campos elétrico e magnético, diferença que passa desapercebida pelo seu uso do formalismo de componentes.

Em 1908 Einstein e Laub comentaram pela primeira vez de forma escrita a teoria de Minkowski. Ambos não se impressionaram com o formalismo de Minkowski, achavam-no muito difícil e pensavam que seria possível derivar os mesmos resultados usando o formalismo vetorial para tratar as coordenadas espaciais e o tempo separadamente.[27] Notemos que, neste artigo, reescreveram as equações da eletrodinâmica de Minkowski usando a análise vetorial comum, o que já foi um avanço com relação ao artigo de 1905, escrito utilizando as componentes dos vetores.

Einstein passou a se interessar em usar formalismo quadridimensional de Minkowski na eletrodinâmica após o início de seus estudos sobre a relatividade geral, nos quais percebeu a importância do cálculo diferencial absoluto desenvolvido em 1901 por Ricci e Levi-Civita. Em seu *Manuscrito sobre a Teoria da Relatividade Especial* escrito

---

[26] LORENTZ 1952, pp. 37- 65.
[27] WALTER 1999, p. 108-109, REICH 1994, pp. 174-75.

entre 1912 e 1914, Einstein usou o formalismo quadridimensional de Minkowski na eletrodinâmica, na seção em que discute as transformações dos campos, pois este formalismo "traz uma simplificação esplêndida" para a teoria da relatividade.[28]

Einstein começou a perceber o poder heurístico da matemática na formulação de novas teorias físicas ao desenvolver seus trabalhos sobre a teoria da relatividade geral, no período de 1912-1916. Antes de 1912, ele evitou o uso inovador da matemática, ou mesmo uma matemática mais complicada. Em particular, ao contrário de outros físicos e matemáticos da época, Einstein não se impressionou com as idéias físicas envolvidas no formalismo quadridimensional desenvolvido pelo alemão Hermann Minkowski. Einstein acreditava que Minkowski havia introduzido um formalismo matemático útil, mas que não tinha importância na interpretação das idéias fundamentais das teorias da relatividade especial e geral.[29]

Conclusões

No final do século XIX uma das questões estudadas pelos físicos era a eletrodinâmica dos corpos em movimento. Em 1904 Lorentz concluiu que os fenômenos ópticos não dependem do movimento de translação em qualquer ordem em v/c. Mostrou também que as equações do campo eletromagnético escritas em um sistema S em repouso com relação ao éter mantêm sua forma invariante quando escritas em um sistema inercial S' movendo-se com $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ com relação a S, se as coordenadas no novo sistema se transformarem de acordo com as "transformações de Lorentz", nome usado até os dias de hoje e introduzido por Poincaré.

Lorentz não utilizou o formalismo vetorial em seu trabalho (utilizava o formalismo de componentes cartesianas). Apesar de considerar que a coordenada temporal também se alterava em uma mudança de referencial, Lorentz não a considerou como uma coordenada do mesmo tipo que as coordenadas espaciais e não utilizou nenhuma idéia semelhante a um "espaço-tempo". Esse enfoque foi introduzido na mesma época por Poincaré.

Em seu artigo publicado em 1905, Poincaré analisou as propriedades de transformação de muitas grandezas físicas, deu o tratamento completo da covariância das

[28] EINSTEIN 1912, p. 33.
[29] PYENSON 1985, p. 80.

equações de Maxwell, introduziu quadrivetores e a tensão de Poincaré e provou o caráter de grupo das "transformações de Lorentz". Entre as inovações de Poincaré, está a introdução de uma quarta coordenadas imaginária *i*t e a interpretação desta coordenada como sendo equivalente às três coordenadas espaciais.

Em linhas gerais, em seus trabalhos de 1905 e 1906, Poincaré mostrou que o conjunto das transformações de Lorentz forma um grupo e que essa propriedade é necessária para descartarmos o movimento absoluto e com isso resguardarmos o princípio da relatividade dos movimentos uniformes. Ele conseguiu unir as transformações de Lorentz com a teoria dos invariantes e foi o primeiro a representar a coordenada temporal como uma quarta dimensão imaginária no espaço. Foi sobre esses princípios que Minkowsky elaborou em 1908 sua teoria de espaço-tempo.

Em 1908 Minkowski publicou dois artigos fundamentais para o desenvolvimento do formalismo quadridimensional do eletromagnetismo. Nestes artigos Minkowski desenvolveu seu formalismo quadridimensional na forma matricial e o aplicou para mostrar que as equações da eletrodinâmica se mantêm invariantes sob transformações de Lorentz. Além disso, discutiu aspectos geométricos associados ao novo formalismo quadridimensional.

Minkowski desenvolveu e apresentou um enfoque original para as equações da eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz. As equações diferenciais escritas na forma de componentes foram logo substituídas pelos quadrivetores por Minkowski. Ele defendia que a formulação quadrivetorial era necessária para tornar evidente a invariância de Lorentz das equações do campo eletromagnético.

Apesar de Einstein ter sido muito importante para o desenvolvimento da teoria da relatividade, ele não contribuiu para o desenvolvimento do formalismo matemático utilizado na teoria. Quando escreveu seu artigo de 1905 sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento, o formalismo quadridimensional de Minkowski ainda não tinha sido inventado, mas o formalismo vetorial já era usado por vários físicos da época. Neste trabalho, Einstein utilizou o formalismo de componentes que dificulta bastante percebermos as propriedades de simetria dos campos que também não foram discutidas por ele. Além disso, não considerou o tempo como uma coordenada imaginária e não interpretou as transformações de Lorentz como rotações no espaço quadridimensional.

Bibliografia

ABRAHAM, Max. Geometrische Grundbegriffe Hülfsmittel. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, vol. IV. Leipzig: von B. G. Teubner, 1910.

BECKER, Richard. *Electromagnetic fields and interactions*. Ed. Fritz Sauter. New York: Blaisdell, 1964.

CUJAV, Camillo. Henri Poincaré's mathematical contributions to relativity and the Poincaré stresses. *American Journal of Physics* **36:** 1102-1113, 1968.

DARRIGOL, Olivier. *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. New York: Oxford University Press, 2000.DONCEL, M. G., HERMANN, A., MICHEL, L., PAIS, A. (eds). *Symmetries in physics (1600-1980)*. Barcelona: Bellaterra, 1987.

DUNCAN, W. J. A review of dimensional analysis. *Engineering* **169:** 533-534, 556-557, 1949.

EINSTEIN, A., LAUB, J. Über die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper. *Annalen der Physik* **26:** 1908. Reimpresso e traduzido em *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol 2. Princeton: Princeton University Press, 1989.

FEYNMAN, Richard P., LEIGHTON, Robert B. & SANDS, Matthew. *The Feynman lectures on physics*. Reading: Addison-Wesley, 1966. 3 vols.

GOLDBERG, Stanley. Henri Poincaré and Einstein theory of relativity. *American Journal of Physics* **35:** 934-44, 1967.

JACKSON, John David. *Classical electrodynamics*. 2^{nd}. ed. New York: John Wiley, 1975.

LANDAU, Lev & LIFCHITZ, E. *The classical theory of fields*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1975.

LORENTZ, H. A., EINSTEIN, A. MINKOWSKI, H & WEYL, H. *The principle of relativity*. Dover publications: New York: 1952.

MILLER, Arthur I. *Albert Einstein's special theory of relativity: Emergence (1905) and early interpretation (1905-1911)*. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1981.

MINKOWSKI, H. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. *Mathematische Annalen* **68**: 472, 1910.

MINKOWSKI, H. Raum und Zeit. *Physikalische Zeitschrift* **10:** 104-111, 1909. Utilizamos a tradução inglesa publicada em LORENTZ, H. A., EINSTEIN, A. MINKOWSKI, H & WEYL, H. *The principle of relativity*. Dover publications: New York: 1952.

MØLLER, C. *The theory of relativity*. 2nd. ed. Oxford: Clarendon Press, 1972.

POINCARÉ, Henri. Sur la dynamique de l'électron. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **21:** 129-176, 1906. Reimpresso em *Oeuvres de Henri Poincaré*, vol 9, pp. 489-550. Paris: Gauthier-Villars, 1954.

PYENSON, Lewis. *The young Einstein, the advent of relativity*. Bristol: Adam Hilger Ltd, 1985.

SOMMERFELD, A. Zur Relativitätstheorie. I. Vierdimensionale Vektoralgebra. *Annalen der Physik* **32:** 749-776, 1910 (a).

SOMMERFELD, A. Zur Relativitätstheorie. II. Vierdimensionale Vektoralgebra. *Annalen der Physik* **33:** 649-689, 1910 (b).

WALTER Scott. Minkowski, mathematicians, and the mathematical theory of relativity. In H. GOENNER, H., RENN, J., RITTER, J. & SAUER, T. (eds.) *The expanding worlds of general relativity, Einstein studies*, vol. 7, Boston: Birkhäuser, 1999 (b).

WALTER, Scott. The non Euclidean style of Minkowskian relativity em GRAY, Jeremy J. (ed.) *The symbolic universe, geometry and physics 1890-1930*. Oxford: Oxford University Press, 1999 (a).

WHITTAKER, Edmund T. *A history of the theories of aether and eletricity*. New York: Humanities Press, 1973. 2 vols.