POR QUE OS QUATÉRNIONS SÃO COMPOSTOS POR QUATRO NÚMEROS?

CIBELLE CELESTINO SILVA & ROBERTO DE ANDRADE MARTINS

(*Unicamp - Brasil)*

Resumo

Este artigo analisa a invenção dos quatérnions por Hamilton a partir da generalização da interpretação geométrica dos números complexos. Sua tentativa inicial foi buscar a correspondência entre vetores no espaço tridimensional e os elementos do campo de tríades do tipo a + b*i* + c*j*. No entanto, essa analogia mostrou-se infrutífera, levando Hamilton a introduzir os quatérnions. Discutimos também alguns problemas existentes na interpretação da parte real de um quatérnion, que não foram percebidos por Hamilton.

Abstract

Hamilton created quaternions as the result of generalization of the geometric representation of complex numbers. At first, he looked for an analogy between vectors in three-dimensional space and the components of a triad of numbers, such as a + b*i* + c*j*. However, this analogy was unprofitable, leading Hamilton to introduce quaternions. We also discuss some problems related to the interpretation of the quaternion's real part, that Hamilton didn't notice.

1. Introdução

A invenção dos quatérnions por William Rowan Hamilton (1805-1865) em 1843 está intimamente relacionada com seus estudos sobre números complexos, sua representação geométrica e das idéias a eles associadas. Como era costume na época, Hamilton utilizava a representação geométrica de números complexos no plano através de pares reais. Desta forma, a correspondência entre números complexos e vetores planos mostrava como os complexos poderiam se relacionar com os pares de números reais.[1]

A tentativa de generalização natural para um número complexo representar algo no espaço tridimensional seria buscar a correspondência entre vetores no espaço e

[1] Antes de Hamilton, Gauss, Wessel, Argand, Buée, Mourey, Warren também estudaram a representação de um número complexo no plano (CROWE 1967).

os elementos do campo de tríades reais (a, b, c), correspondendo a um número "hipercomplexo" a + bi + cj.[2] No entanto, como discutiremos abaixo, essa analogia mostrou-se infrutífera, levando Hamilton a introduzir os quatérnions como forma de representar grandezas vetoriais no espaço tridimensional. Como Hamilton chegou aos quatérnions? Quais eram seus problemas e como encontrou suas soluções? Neste trabalho vamos discutir estas questões analisando, entre outras coisas, artigos de Hamilton reunidos em seus *Mathematical Papers*.

2. O que é um quatérnion?

Um quatérnion é uma entidade matemática descrita por quarto componentes; é escrito como q = a + bi + cj + zk, onde i, j, k são três unidades imaginárias diferentes entre si, que obedecem as seguintes regras de multiplicação:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j.$$

Um quatérnion q = a + bi + cj + zk pode ser dividido em duas partes, que Hamilton denominou de parte escalar (a) e parte vetorial (bi + cj + zk). Hamilton introduziu os símbolos S e V para representar as partes escalar e vetorial, respectivamente, de modo que um quatérnion q pode ser escrito como Sq + Vq. Um quatérnion cuja parte escalar é nula (q = bi + cj + zk) é chamado "quatérnion puro" e se parece com um vetor comum.[3]

As operações aritméticas entre dois quatérnions (soma, subtração, multiplicação e divisão) foram definidas de modo que seus resultados também fossem quatérnions. A maior parte das propriedades aritméticas são válidas para os quatérnions, exceto a regra comutativa da multiplicação.

Por ser a operação que apresenta maiores novidades, vejamos como é o produto entre dois quatérnions. Usando as regras de multiplicação entre i, j, k, o produto entre dois quatérnions puros $\alpha = (i\text{x} + j\text{y} + k\text{z})$ e $\beta = (i\text{u} + j\text{v} + k\text{w})$ pode ser escrito como

$$\alpha\beta = -\text{xu} + k\text{xv} - j\text{xw} - k\text{yu} - \text{yv} + i\text{yw} + j\text{zu} - \text{zw} - i\text{zv} - \text{zw} =$$
$$-(\text{xu} + \text{yv} + \text{zw}) + i(\text{yw} - \text{zv}) + j(\text{zu} - \text{xw}) + k(\text{xv} - \text{yu}) = \text{S}\alpha\beta + \text{V}\alpha\beta,$$

Como vemos, o produto entre dois quatérnions também é um quatérnion pois é formado pela soma de uma parte escalar real e uma parte vetorial imaginária. Notemos que a parte escalar do produto tem sinal negativo e, em linguagem atual, a parte vetorial é semelhante ao produto vetorial entre dois vetores.

[2] HAMILTON 1967, p. 107.

[3] Essa semelhança é apenas superficial. Na realidade eles são objetos matemáticos bastante distintos. Para uma discussão sobre esse assunto veja SILVA & MARTINS 2002.

3. Representação geométrica de um quatérnion

Para entendermos melhor o significado geométrico de um quatérnion e dos símbolos i, j, k, vamos recordar a interpretação geométrica de um número complexo. Na figura 1, o vetor **r** = a + bi representa um número complexo em um plano com as componentes real a e imaginária b. Se fizermos

r' = i **r** = –b + ai e
r'' = i **r'** = –a – ib = – **r**, teremos que
ii **r** = –**r** e i^2 = – 1.

A figura mostra que multiplicar um vetor **r** por i e i^2 produz uma rotação anti-horária de $\pi/2$ e π respectivamente.

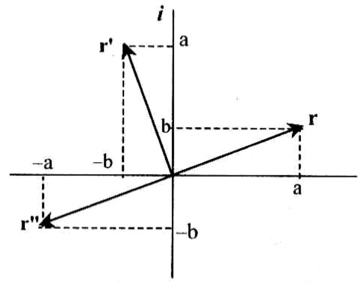

Figura 1. Representação de um número complexo no plano

Hamilton definiu o conceito de "versor perpendicular" a partir de um sistema de três vetores unitários perpendiculares entre si como sendo o quatérnion capaz de rodar um vetor de $\pi/2$ em torno de uma direção perpendicular ao vetor e ao quatérnion. Os versores são operadores que produzem rotações de $\pi/2$ no sentido anti-horário. Supondo um sistema de três vetores unitários perpendiculares entre si, I, J, K, o operador que transforma J em K é um versor perpendicular e como seu eixo de rotação é o vetor I, Hamilton o chama de i. Assim, K/J = i ou K = iJ, como mostra a figura 2. Analogamente podemos escrever I = jK e J = kI. Apesar de os conjuntos I, J, K e i, j, k terem significados diferentes, Hamilton passou a usá-los como sendo conjuntos equivalentes.[4]

[4] HAMILTON 1899, vol. I, pp. 242 e 335-45. O'Brien chamou atenção para essa mistura de significados e símbolos, preferindo usar α, β, γ para representar os vetores unitários, para não haver confusão com os símbolos usados para representar as unidades imaginárias (O'BRIEN 1852, p. 178). Atualmente ainda é comum haver confusão entre o significado de um quatérnion puro e um versor. Essa dificuldade conceitual existente na álgebra vetorial moderna está relacionada com essa mistura de significados por parte de Hamilton e Tait. Para mais detalhes sobre esse assunto veja SILVA & MARTINS 2002.

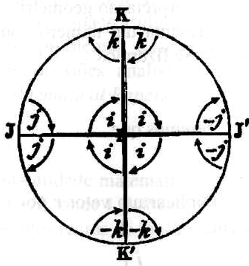

Figura 2. **Os versores unitários *i, j, k* e os versores unitários I, J, K.**

4. Por que os quatérnions são formados por quatro números?

O ponto de partida de Hamilton[5] foi a análise do modo de representar o plano dos números complexos usando pares reais. Um número complexo $x + yi$ com x, y reais pode ser representado por um ponto P de coordenadas (x,y) no plano. Neste caso, o número imaginário $i = \sqrt{-1}$ representa uma direção perpendicular à reta dos números reais. Seria possível desenvolver um formalismo mais geral para o espaço tridimensional? A situação análoga em três dimensões poderia ser a correspondência entre vetores no espaço e os "tripletos" – certos números contendo uma parte real e duas partes imaginárias, tais como $a + bi + cj$.

Inicialmente, Hamilton pensou em utilizar tripletos, insistindo nesta tentativa durante anos, até pensar na possibilidade de quartetos, os quatérnions. Em uma carta escrita em 1843 para John T. Graves,[6] Hamilton narra os passos que o levaram aos quatérnions. Vamos seguir a seqüência descrita nesta carta de Hamilton.[7]

A tentativa natural de generalização de um número complexo representar algo no espaço tridimensional seria $a + bi + cj$. O uso de Hamilton da representação geométrica no desenvolvimento da teoria de quatérnions pode ser visto no trecho abaixo: "Como $\sqrt{-1}$, em um sentido bem conhecido, é uma linha perpendicular à linha 1, parece natural que deva haver outro imaginário para expressar a linha perpendicular a ambas anteriores; e como a rotação dupla de 1 em relação a ela também conduz a −1, ela também deve ser a raiz quadrada da unidade negativa, embora não deva ser confundida com a anterior. Chamando a antiga raiz, como os alemães

[5] HAMILTON 1967, pp. 3-96.
[6] HAMILTON 1967, pp. 106-110.
[7] Seguimos a seqüência de Hamilton desenvolvida em HAMILTON 1967, p. 107-08. Veja também os artigos VAN DER WAERDEN 1976 e O' NEILL 1986.

freqüentemente fazem, de *i*, e a nova de *j*, questionei quais leis deveriam ser assumidas para a multiplicação de $a + ib + jc$ com $x + iy + jz$."[8]

No caso dos números complexos, o produto de um complexo por um real significa (geometricamente) uma ampliação ou contração do vetor plano correspondente; e o produto por um número imaginário representa uma rotação. A soma, a subtração, o produto e a divisão de dois números complexos produzem outro número complexo, ou seja, esses números formam uma álgebra fechada para as operações aritméticas. Hamilton tentou, em sua generalização dos números complexos, manter essas propriedades.

Para verificar a consistência da generalização, Hamilton testou a validade da lei dos módulos que diz que o módulo de um produto deve ser igual ao produto dos módulos. Sejam dois tripletos $t_1 = a + ib + jc$ e $t_2 = x + iy + jz$. Vamos analisar o produto $t_1.t_2$. Multiplicando cada termo do primeiro por cada termo do segundo, este produto resulta em

$$t_1 t_2 = -ax - by - cz + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy)$$

O problema é: o que fazer com o produto *ij* para que o produto entre dois tripletos continue sendo um tripleto? Hamilton tentou várias soluções para este problema assumindo, sempre que $i^2 = j^2 = -1$. Tentou considerar $(ij)^2 = 1$ que resulta em $ij = 1$ ou $ij = -1$; testou também $ij = 0$ e depois $ij = -ji = k$, onde k é uma constante a ser determinada.

Vamos analisar a primeira alternativa, considerando o caso mais simples do quadrado de um tripleto. Seja o tripleto

$t = a + ib + jc$, então
$t.t = a^2 - b^2 - c^2 + 2iab + 2jac + 2ijbc$.

Se considerarmos o módulo de t, devemos ter $|t|.|t| = |t.t|$. Além disso, sabemos que, de acordo com a geometria tradicional, $|t|.|t| = (a^2 + b^2 + c^2)$.

Se fizermos $ij = 1$ ou $ij = -1$ teremos um tripleto, para o produto

$t.t = (a^2 - b^2 - c^2 \pm 2bc) + 2iab + 2jac$ e obtemos
$|t.t|^2 = (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2$ ou
$|t.t|^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2$.

Logo, em qualquer um dos casos a lei dos módulos não permanece válida, ou seja, $|t|.|t| \neq |t.t|$. Se quisermos que tal propriedade continue válida, devemos rejeitar $ij = 1$ e $ij = -1$.

Notemos que se ignorarmos o termo *ij* a regra do módulo se satisfaz:

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2,$$

[8] HAMILTON 1967, p. 107.

de modo que outra alternativa possível seria fazer $ij = 0$. Hamilton a considerou artificial e desconfortável. Percebeu então que o termo $2ij$bc poderia desaparecer de outra forma. Este termo surge, na multiplicação dos dois tripletos, sob a forma de $ib j$c + jcib. Supondo que a ordem dos fatores não altera o produto, obtém-se $2ij$bc. Mas os dois termos poderiam se anular se ij fosse igual a $-ji$. Assim, Hamilton considerou $ij = -ji$, e fez $ij = k$ e $ji = -k$, deixando a possibilidade de decidir depois se $k = 0$ ou não. Com esta escolha, estava resolvido o problema do produto de um tripleto por si mesmo.

Note-se que Hamilton trabalhou fazendo várias tentativas, antes de chegar a uma decisão; e que ele partia da análise de casos particulares mais simples, em vez de atacar diretamente o caso geral.

Em seguida, Hamilton considerou o produto de dois tripletos contidos no mesmo plano:

$$t_1 = (a + bi + cj) \text{ e } t_2 = (x + bi + cj)$$
$$t_1.t_2 = (ax - b^2 - c^2) + i(a + x)b + j(a + x)c + ijbc + jicb,$$
fazendo $ij = k$ e $ji = -k$, obteve
$$t_1.t_2 = (ax - b^2 - c^2) + i(a + x)b + j(a + x)c + k\,(bc - cb),$$

Assim, é possível eliminar o termo com o coeficiente k e o produto resulta em um tripleto.

A seguir Hamilton testou se a lei dos módulos continuaria válida caso fizesse $k = 0$. Para isso, considerou o produto de dois tripletos quaisquer:

$$t_1 = a + bi + cj \text{ e } t_2 = x + yi + zj,$$
$$t_1t_2 = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + k(bz - cy),$$
fazendo $ij = -ji = k = 0$ obteve que
$$(|t_1t_2|)^2 = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2 = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + c^2x^2 + c^2z^2 + 2bycz$$
e $$(|t_1|.|t_2|)^2 = (a^2 + b^2 + c^2).(x^2 + y^2 + z^2) = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2,$$
ou seja, $(|t_1|.|t_2|)^2 = (|t_1t_2|)^2 + (bz - cy)^2$.

Portanto, a lei dos módulos não era válida, a menos que o último termo desaparecesse. O termo $(bz - cy)^2$ é justamente o quadrado do termo que contém o coeficiente k na equação $t_1.t_2$. Segundo Hamilton, esta diferença foi a inspiração que o levou ao quatérnion: "E aqui começou a ficar claro para mim que devemos admitir, em algum sentido, uma *quarta dimensão* no espaço para o cálculo dos tripletos ou, transferindo o paradoxo para a álgebra, admitir um terceiro símbolo imaginário k, que não deve ser confundido com i ou j, mas igual ao produto do primeiro como multiplicador e do segundo como multiplicando; e portanto fui levado a introduzir quatérnions, tais como a + ib + jc + kd, ou (a, b, c, d)"[9]. Fazendo isso, Hamilton obteve uma álgebra adequada.

Hamilton considerou a separação entre as partes real e imaginária uma característica bastante importante e com muitas aplicações, a ponto de introduzir

[9] HAMILTON 1967, p. 108.

símbolos para representá-las. "A parte algebricamente real pode receber [...] todos os valores contidos em uma escala de progressão de números dos negativos aos positivos infinitamente; podemos chamá-la portanto *parte escalar*, ou simplesmente *escalar* de um quatérnion, e simbolizá-la prefixando ao símbolo do quatérnion, o característico Scal., ou simplesmente S. [...]. Por outro lado, a parte algebricamente imaginária, sendo construída geometricamente por uma linha reta, ou raio vetor[10], que em geral tem um comprimento determinado e uma direção no espaço determinada para cada quatérnion, pode ser chamada *parte vetorial*, ou simplesmente *vetor* do quatérnion; e pode ser denotada prefixando o característico Vect. ou V".[11]

A parte vetorial do quatérnion $q = a + ix + jy + kz$ é interpretada como um vetor cujas componentes são x, y, z e é representada por uma única letra grega minúscula: "Considerada de um ponto de vista geométrico, esta parte algébrica imaginária de um quatérnion tem um significado ou representação simples e natural no espaço, de modo que a dificuldade é transferida para a parte algébrica real e somos induzidos a perguntar o que ela significa em geometria, ou o que no espaço poderia sugeri-la"[12].

Hamilton atribui à parte escalar um significado não espacial. Com isso, a interpretação geométrica atribuída à parte real de um número complexo é diferente da atribuída à de um quatérnion. A parte real de um número complexo é interpretada como uma dimensão do espaço, mas no caso dos quatérnions, não. As três dimensões espaciais estão associadas às três unidades imaginárias. Hamilton não comentou esta mudança de interpretação da parte escalar, que invalida a idéia de os quatérnions serem uma extensão dos números complexos, pois suas partes escalares têm significados diferentes.

Os quatérnions não obedecem à propriedade comutativa "e como a ordem da multiplicação destes imaginários não é indiferente, não podemos ter que k^2, ou $ijij$, seja $= +1$, porque $i^2 \times j^2 = (-1) \times (-1) = +1$. Isto é mais como $k^2 = ijij = -iijj = -1$"[13]. De fato esta última hipótese é necessária se quisermos adequar a multiplicação dos quatérnions com a lei da multiplicação dos módulos.

Hamilton não foi o único a inventar um sistema que violasse a lei comutativa. Gibbs, comentando um artigo de Möbius de 1827 intitulado *Barycentrischer Calcul*, afirma que "vimos pela primeira vez, pelo que é de meu conhecimento, [...] que a mudança de posição de duas letras em expressões como AB, ABC, ABCD é equivalente a prefixar o sinal negativo".[14] O fato de os quatérnions formarem uma álgebra não comutativa foi fortemente criticado pelos defensores da álgebra vetorial, mas esse ponto não pode ser discutido aqui.[15]

[10] HAMILTON 1967, p. 236-237. O termo "raio vetor" era usado em astronomia para designar uma linha imaginária ligando um planeta que se move ao redor de um centro.
[11] HAMILTON 1967, p. 236.
[12] HAMILTON 1967, p. 356.
[13] HAMILTON 1967, p. 108.
[14] GIBBS 1961.
[15] Para mais detalhes sobre este assunto veja SILVA 2002.

5. Conclusão

A invenção do cálculo de quatérnions por William Hamilton em 1843 está relacionada com seus estudos sobre números complexos e também com a tentativa de estender a forma de representação dos números complexos no plano para representar grandezas vetoriais tridimensionais através de tripletos. Para chegar a um sistema algebricamente consistente, Hamilton foi obrigado a introduzir uma quarta componente ao tripleto, chegando assim aos quatérnions.

Hamilton não percebeu que a interpretação geométrica de um quatérnion é diferente da de um número complexo. A parte real de um número complexo é interpretada como uma direção, enquanto que a parte real de um quatérnion não. Inicialmente Hamilton interpretou as unidades imaginárias como operadores que produzem rotações, porém posteriormente passou a interpretá-las como vetores unitários, apesar de serem objetos matemáticos completamente diferentes.

6. Bibliografia

CROWE J. M. A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system. London: University of Notre Dame Press, 1967.

GIBBS, Josiah Willard. *The scientific papers of J. Willard Gibbs*, vol 2. New York: Dover, 1961.

HAMILTON, William Rowan. *Elements of quaternions*. London: Longmanns, Green and Co, 1899.

HAMILTON, William Rowan. *The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton vol. 3, Algebra*. Edited for the Royal Irish Academy by A.W. Conway and J.L. Synge. Cambridge: University Press, 1967.

O'NEILL, John. Formalism, Hamilton and complex numbers. *Studies in History and Philosophy of Science* **17**: 351-372, 1986.

SILVA, Cibelle. C. *Da força ao tensor: evolução do conceito físico e representação matemática do campo eletromagnético*. Tese (doutorado), Campinas, SP: Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Física "Gleb Wataghin", 2002

SILVA, Cibelle Celestino & MARTINS, Roberto de A. Polar and axial vectors versus quaternions. *American Journal of Physics* **70**: 958-963, 2002.

VAN DER WAERDEN, B.L. Hamilton's discovery of quaternions. *Mathematics Magazine* **49**: 227- 234, 1976.

Cibelle Celestino
E-mail: cibelle@ifi.unicamp.br
Roberto de A. Martins
E-mail: rmartins@ifi.unicamp.br