

**Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos - IFSC**

FCM 208 Física (Arquitetura)

Equilíbrio Estático e Análise de Estruturas

Prof. Dr. José Pedro Donoso

Equilíbrio Estático e análise de estruturas

Arquitetura Grega e romana : precisão geométrica, elegância e funcionalidade

Condições de equilíbrio : Forças externas. Torque.

Exemplos de equilíbrio estático : vigas, pontes, lanternas pinduradas, portas

Centro de gravidade : Torre de Pisa. Prédios submetidos a ventos fortes

Arcos : carga transferida com segurança para os alicerces. A abóbada.

O Panteão. O arco gótico

Estruturas tipo telhados : sistema modelo: escadas



Templo de Poseidon, no Mar Egeu. O monumento, construído na época de Péricles no alto do Cabo Sunium na extremidade sudeste da Ática, orientou os navegadores durante séculos.

Civilizações perdidas: *Grecia*. Time - Life Livros & Abril Coleções, 1998



Grecia: Ilha de Rodes

Templo de Lindo

A Grécia clássica emprestou à arquitetura um grande sentimento de pureza, elegância e funcionalidade. Essas qualidades aparecem claramente nas fortes colunas dóricas e nos degraus harmoniosos. As colunas se estreitam a medida que sobem: os projetistas conheciam a precisão geométrica.

Biblioteca de História Universal Life: *Grecia Clássica*
Livraria José Olympio Editora, 1980



Ruínas do templo de Afrodite

Construído no século I a.C.

Os romanos possuíam talento sem rival para a engenharia, característica reconhecida até pelos gregos. O geógrafo e historiador grego Estrabão, que visitou Roma no início do século 1 d.C., notou que seus engenheiros se sobressaíam nas construções de estradas e aquedutos, grandes edifícios públicos, espaçosos banhos, imponentes templos e arenas para o divertimento dos cidadãos.

Civilizações perdidas: *Roma*
Time - Life & Abril Coleções, 1998

Ruínas do Templo de Saturno, Roma

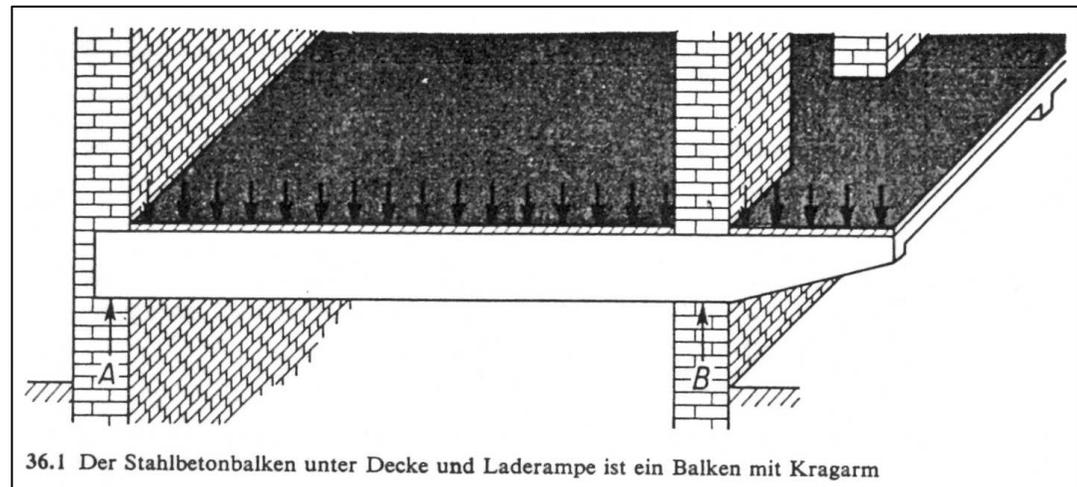
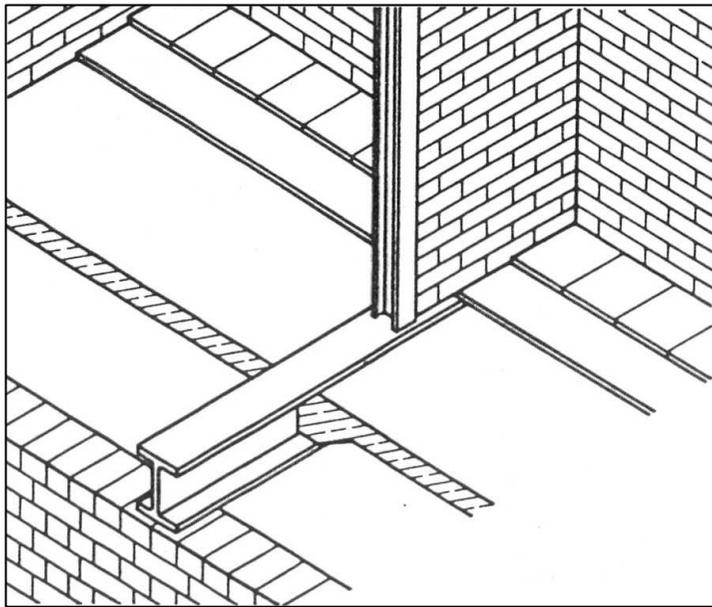
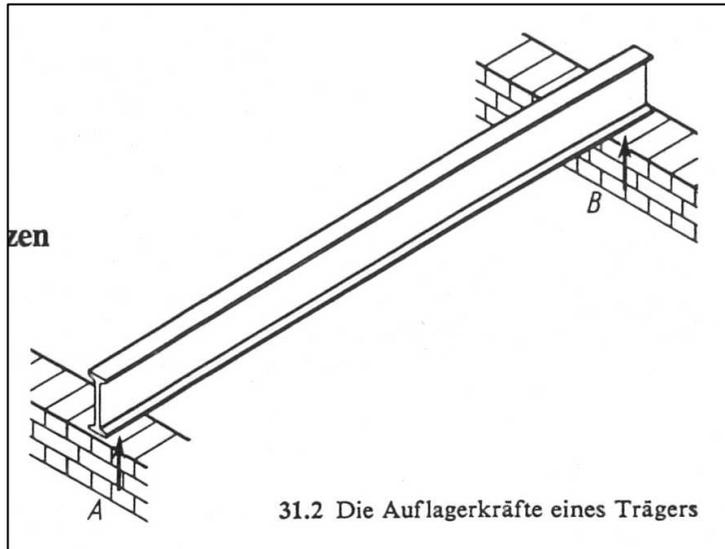


E. Pucci, *Toda Roma*, Bonechi editore

Os romanos faziam maravilhas com uns poucos materiais básicos de construção. O terreno em volta de Roma era rico em uma areia vulcânica (*pozolana*). Misturada com cal e água, formava um resistente **cimento**. Os engenheiros romanos aprenderam a misturar esse cimento com outros produtos para fazer **concreto**. Forte e sem emendas, o concreto moldado mostrou-se o meio perfeito para os grandes projetos dos construtores.

Equilíbrio Estático

A determinação das forças que atuam sobre um corpo em equilíbrio estático tem muitas aplicações. Para que haja equilíbrio é preciso (1) que as resultantes das **forças externas** que agem sobre o corpo seja nula e (2) que a resultante dos **torques** que atuam sobre o corpo, em relação a *qualquer* ponto, seja nula.



W.E. Schulze, J. Lange: *Kleine Baustatik*

Equilíbrio Estático e Análise de Estruturas

Condições de Equilíbrio:

- (1) a soma vetorial das forças que atuam sobre o corpo deve ser zero
- (2) a resultante dos torques de todas as forças que atuam sobre um corpo, calculadas em relação a um eixo (qualquer), deve ser zero.

Torque ou *momento de força*: é o produto de uma força F pela distância l ao eixo:

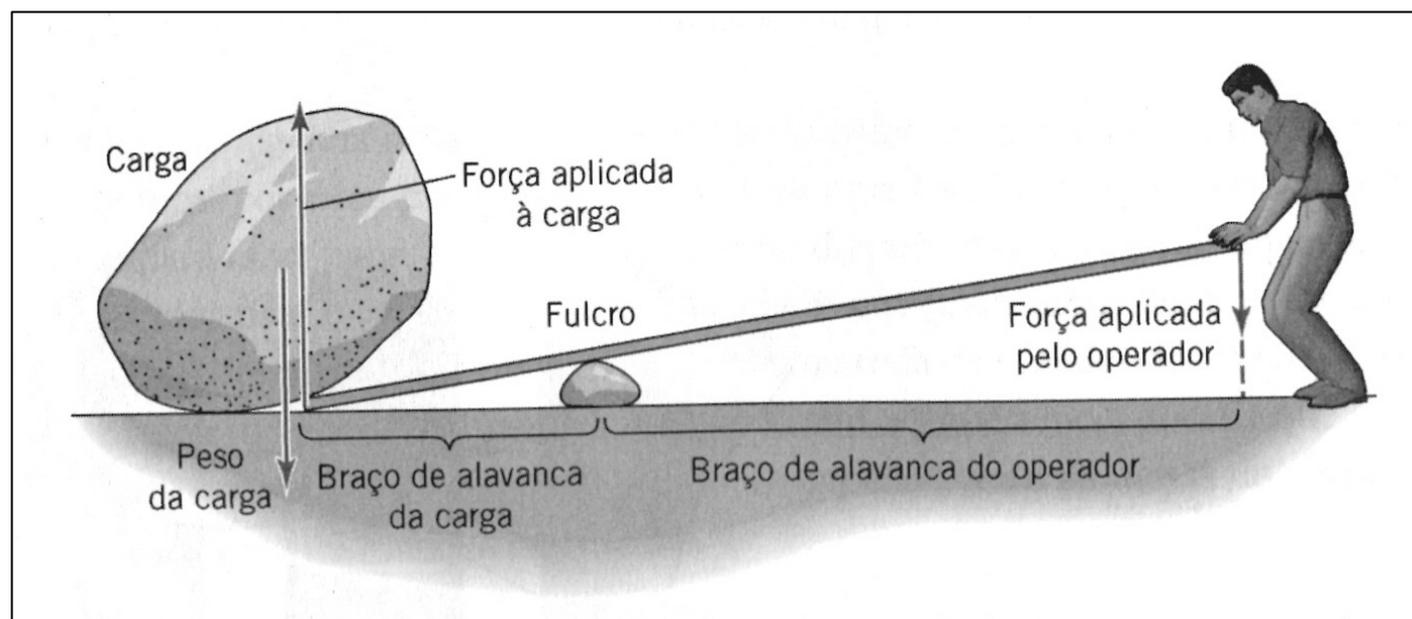
$$\tau = F \cdot l$$

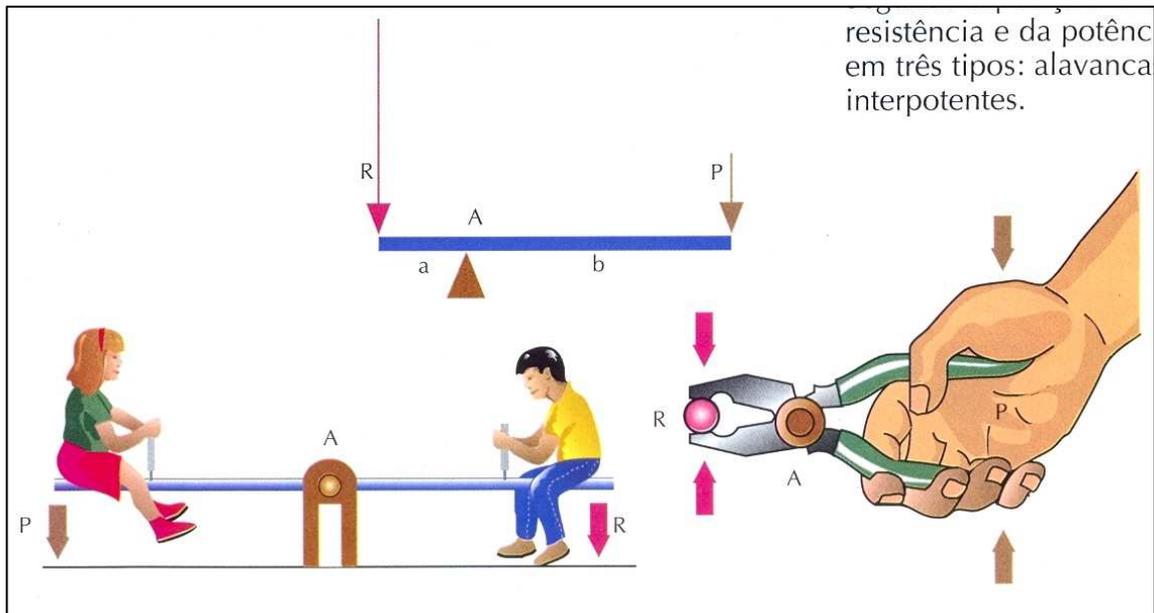
O torque mede a tendência da força F de provocar uma **rotação** em torno de um eixo. A segunda condição de equilíbrio corresponde à ausência de qualquer tendência à rotação.

Unidades: Torque: 1 N·m

Alavancas

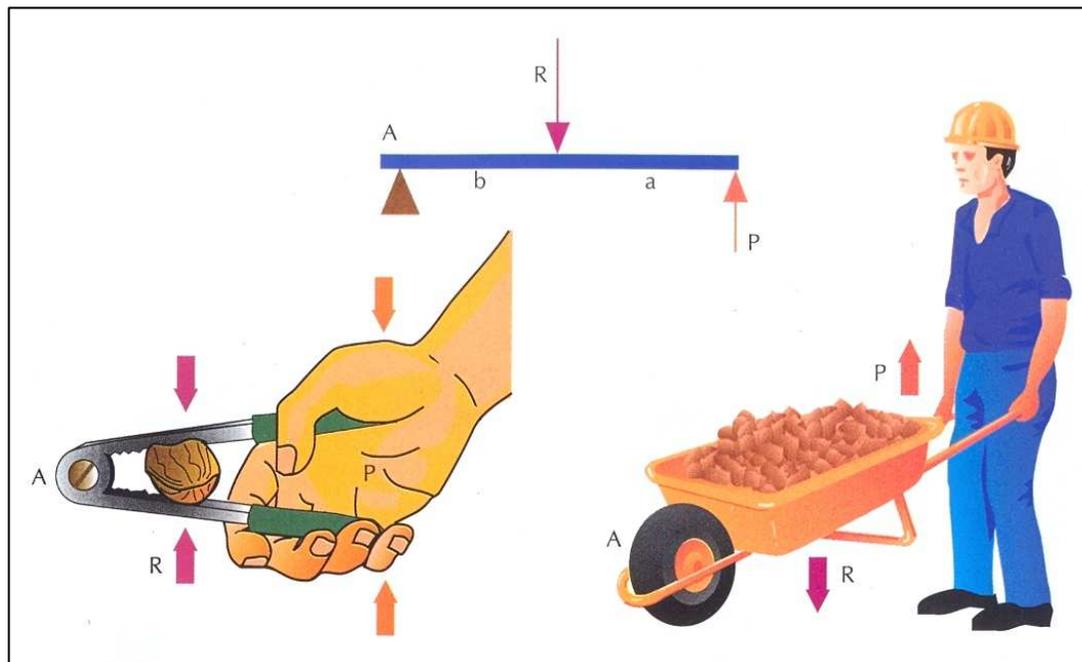
Alavancas: uma barra é colocada sobre um apoio, chamado *fulcro* ou *ponto de apoio* de forma que a distância entre o fulcro e uma das extremidades da barra seja maior que a distância entre o fulcro e a outra extremidade. O *fulcro* funciona como eixo de rotação da barra. O peso da carga produz um torque em um sentido que deve ser vencido por um torque no sentido oposto, produzido por uma força aplicada à extremidade mais longa. Como o *braço de alavanca* é maior, é possível levantar a carga exercendo uma força menor do que o peso da carga



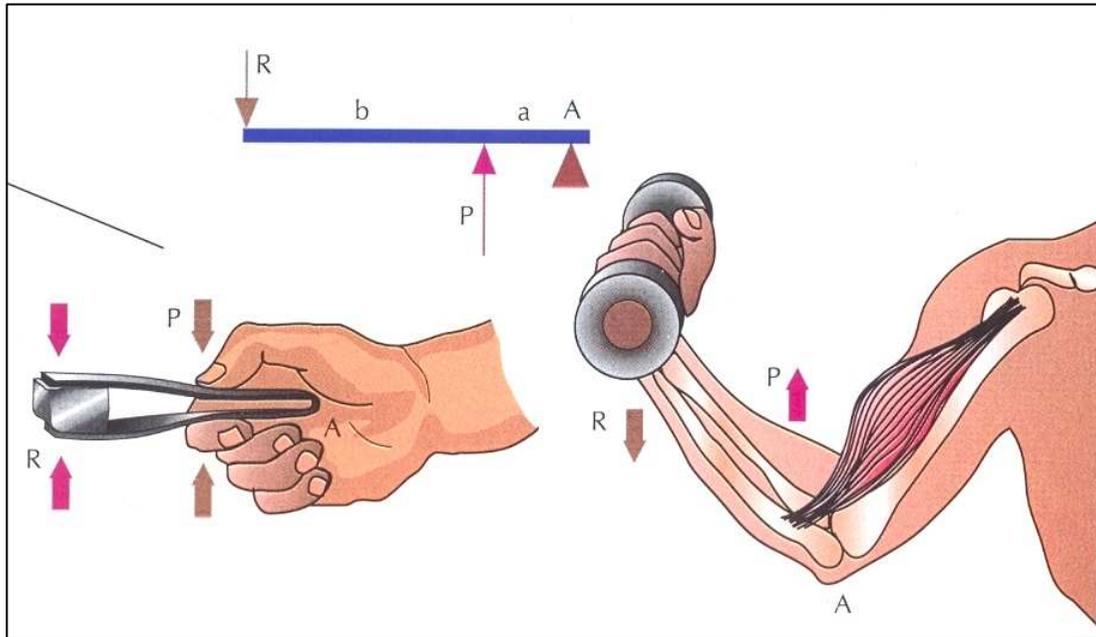


A alavanca consiste numa barra rígida que pode girar ao redor de um ponto de apoio.

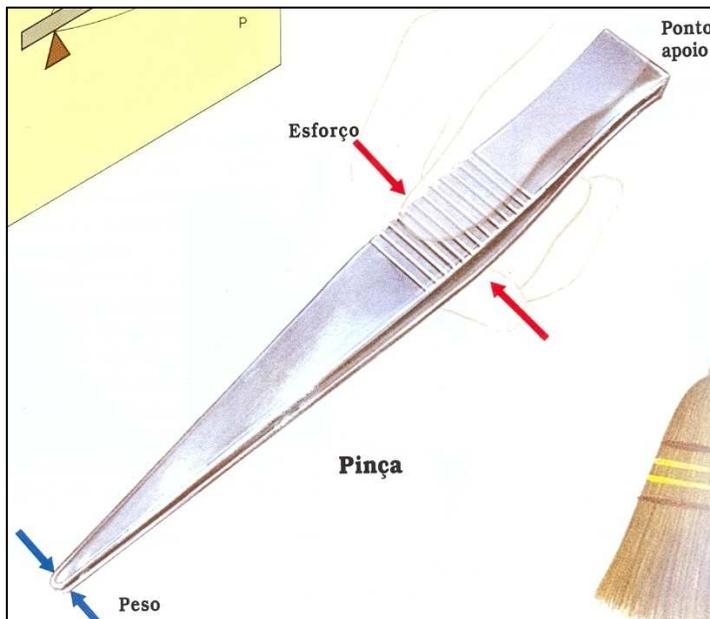
Alavanca interfixa (1ª classe) : o ponto de apoio (A) fica entre o peso (R) e o esforço aplicado (P). Exemplos: as tesouras, a barra para o levantamento de pesos e o alicate



Alavanca inter-resistente (2ª classe): o ponto de apoio (A) fica em uma extremidade. O esforço é aplicado na outra. Exemplos: o carrinho de mão e o quebra-nozes.



Alavanca inter-potente (3ª classe): o esforço (P) é aplicado entre o peso (R) e o ponto de apoio (A). Exemplos: as pinças e o antebraço humano.



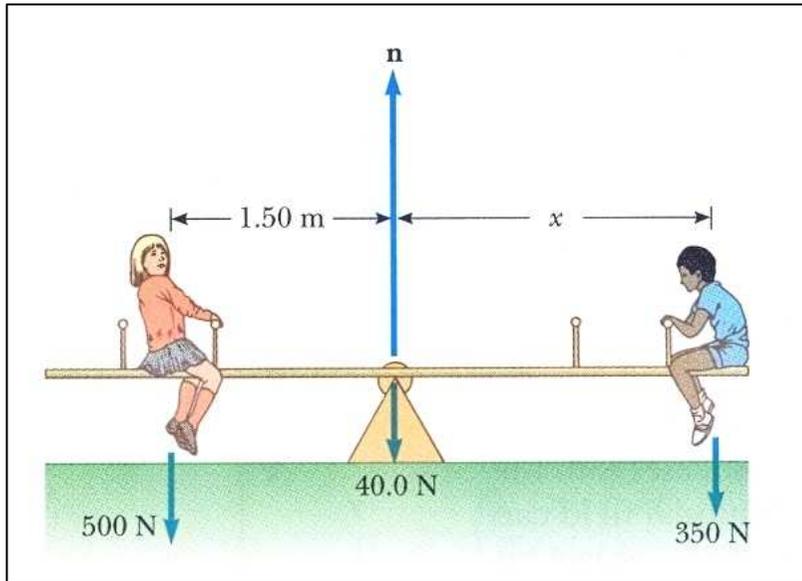
Lei da alavanca: igualdade dos torques:

$$P \cdot a = R \cdot b$$

onde P e R representam as forças e, a e b as distâncias.

Coleção *Ciência & Natureza Forças Físicas*. Abril Livros, 1996

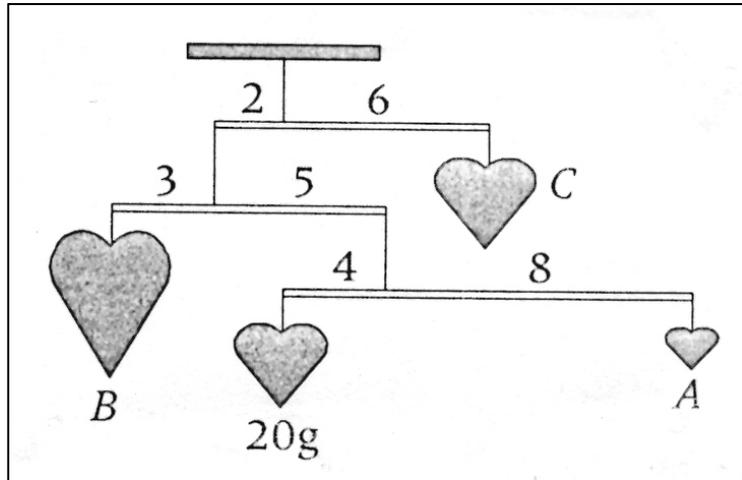
Exemplos de Equilíbrio Estático



Duas crianças, cujos pesos estão indicados em newtons, se equilibram em um balanço. Determine o valor da força vertical n e a posição x da segunda criança

Respostas: $n = 890 \text{ N}$, $x = 2.14 \text{ m}$

Ref: Serway: *Physics* 4th ed. Chap. 12



MóBILE: de 4 ornamentos e 3 varas.

As distâncias (em cm) estão indicados na figura, e a massa de um dos ornamentos é conhecida. Determine as massas dos ornamentos A, B e C de modo que o móbile fique em equilíbrio.

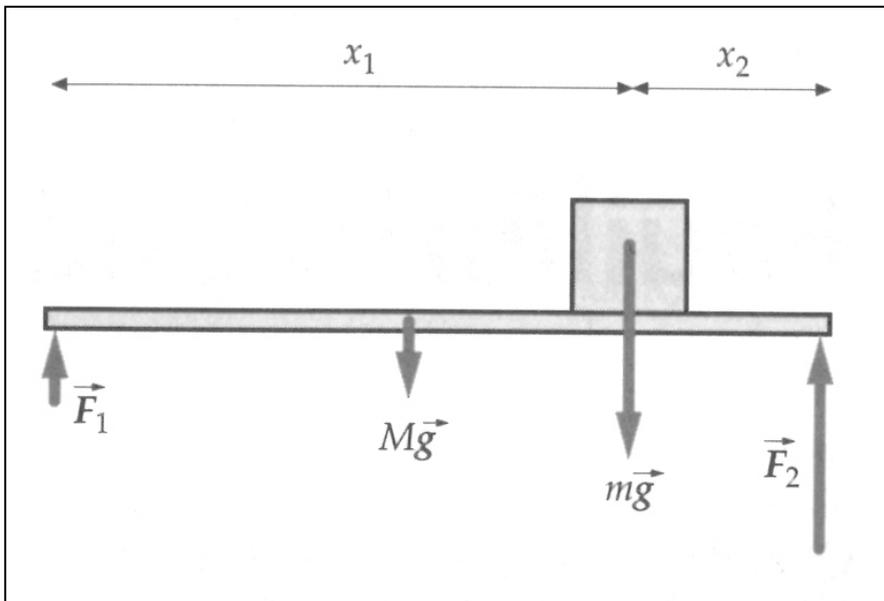
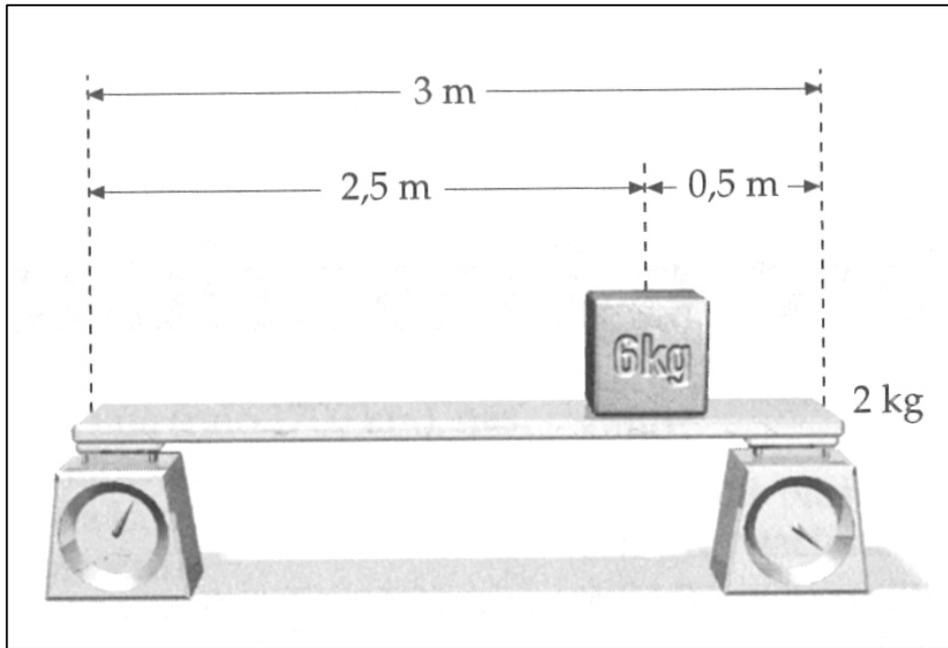
Resposta: $m_A = 10 \text{ g}$, $m_B = 50 \text{ g}$, $m_C = 26.7 \text{ g}$

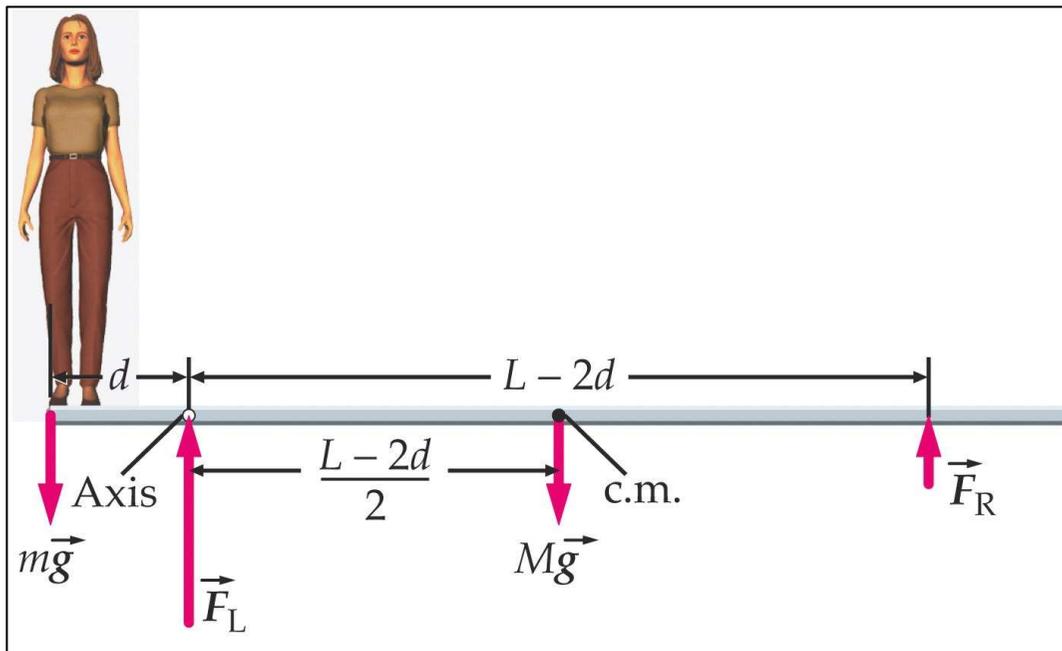
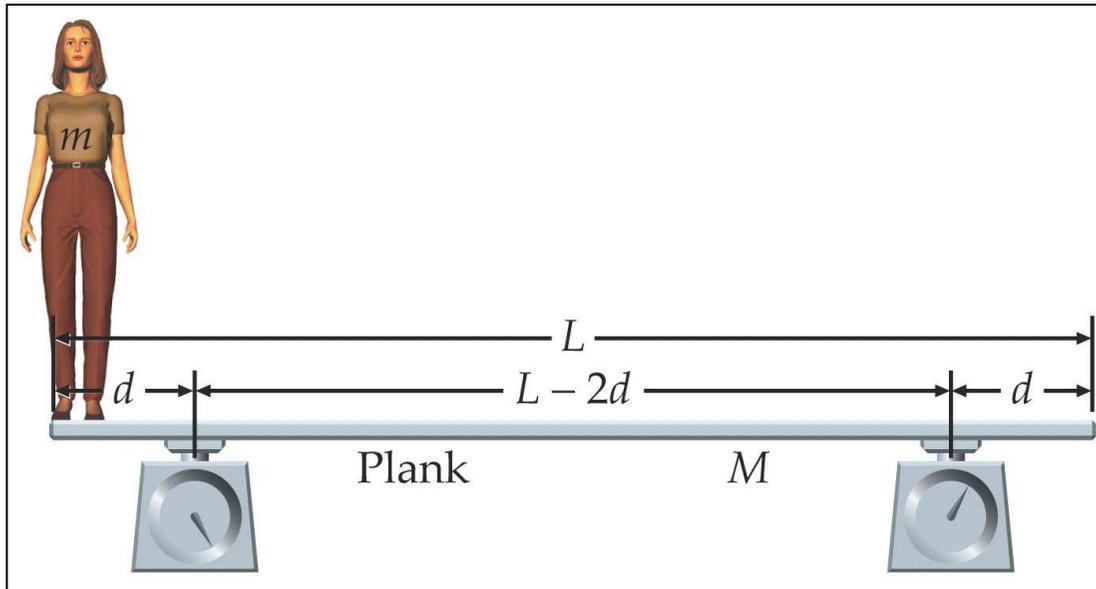
Ref: Okuno, Caldas, Chow, *Física para Ciências biológicas*

Equilíbrio Estático

Uma prancha de comprimento $L = 3$ m e massa $M = 2$ kg está apoiada nas plataformas de duas balanças como mostra a figura. Um corpo de massa $m = 6$ kg está sobre a prancha à distância $x_1 = 2.5$ m da extremidade esquerda e à distância x_2 da extremidade direita. Determine as leituras F_1 e F_2 das balanças

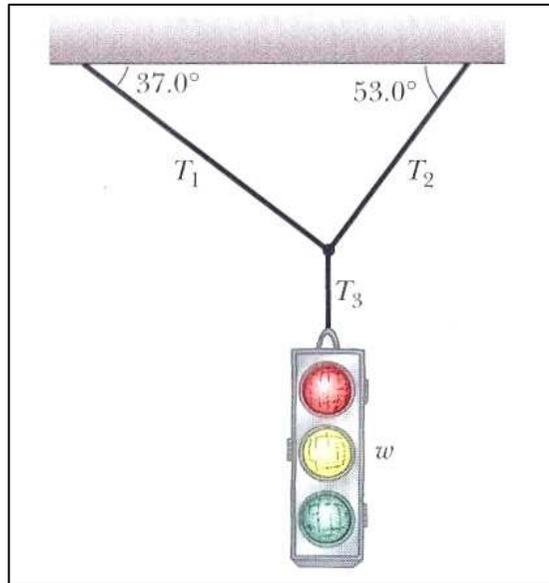
Solução: $F_1 = 19.6$ N, $F_2 = 58.9$ N





Uma prancha de comprimento $L = 3 \text{ m}$ e massa $M = 35 \text{ kg}$ está apoiada em duas balanças, cada qual localizada a $d = 0.5 \text{ m}$ de uma das extremidades. Determine as leituras das balanças quando Maria (massa $m = 45 \text{ kg}$) fica de pé na extremidade esquerda da prancha.

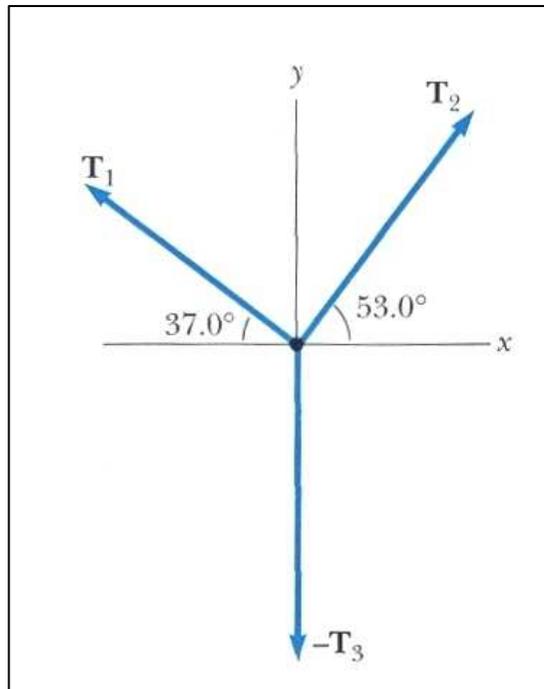
Resposta: $F_L = 723.5 \text{ N}$, $F_R = 61.3 \text{ N}$. Observe que $F_L \gg F_R$
 Ref: P. Tipler, G. Mosca: *Física* 5ª edição, Capítulo 12



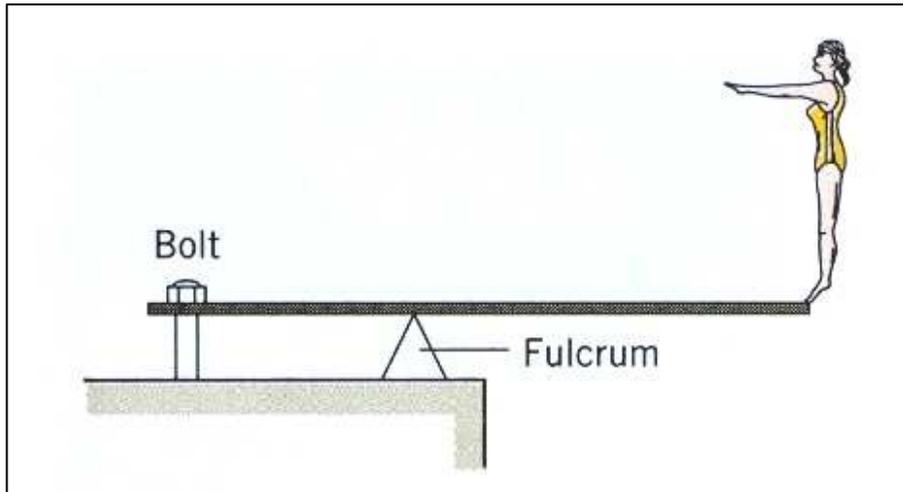
Um sinaleiro de 125 N de peso está pendurado por um cabo preso a outros dois cabos como indicado na figura. Encontre a tensão dos três cabos

Solução: $T_1 = 75.1$ N, $T_2 = 99.9$ N e $T_3 = 125$ N

Ref: Serway, Physics. 4th edition. Chap. 5



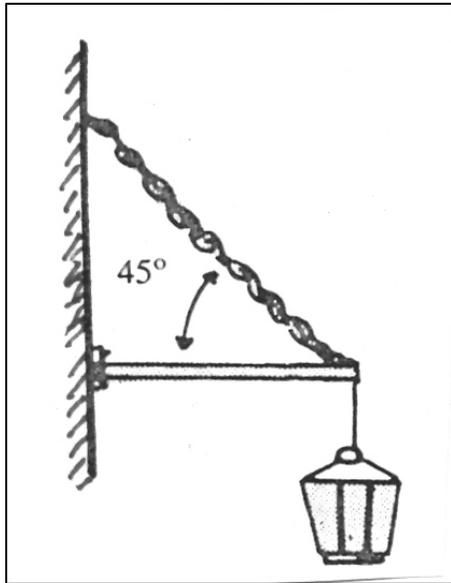
Equilíbrio de um vão livre



Este problema de equilíbrio pode ser ilustrado pelo seguinte exemplo: um mergulhador que pesa 582 N está de pé sobre um trampolim uniforme de 4.5 m, cujo peso é de 142 N. O trampolim está preso por dois pedestais distantes 1.55 m. Encontre a tensão (ou compressão) em cada um dos pedestais.

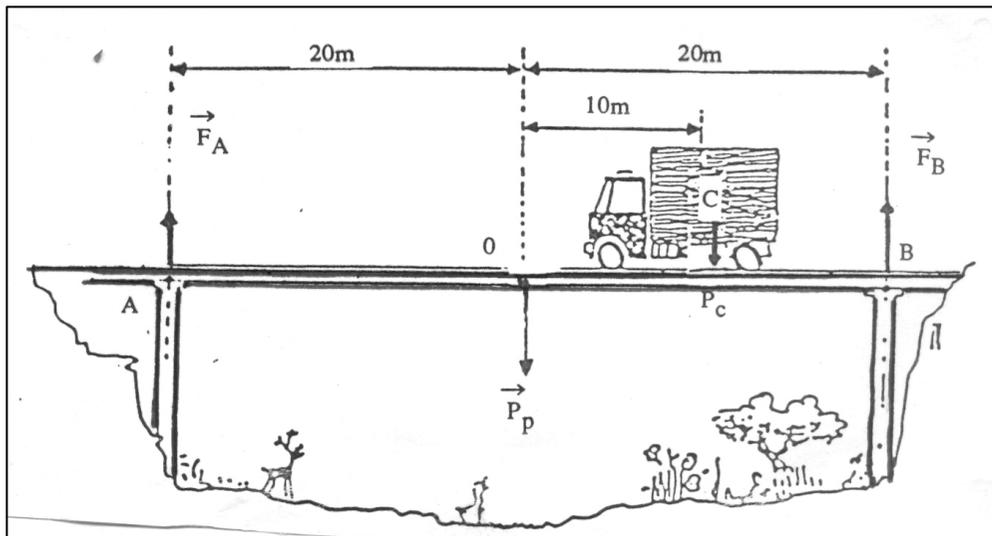
Resposta: pedestal esquerdo: 1.17×10^3 N (tensão)
pedestal direito: 1.89×10^3 N (compressão)

Exemplos de Equilíbrio Estático



Uma lanterna, de massa 10 kg, está presa por um sistema de suspensão constituído por uma corrente e uma haste, apoiadas na parede. A inclinação entre a corrente e a haste horizontal é de 45°. Considerando a lanterna em equilíbrio, determine a força que a corrente e a haste suportam.

Resposta: $T \approx 139 \text{ N}$ e $F \approx 98 \text{ N}$



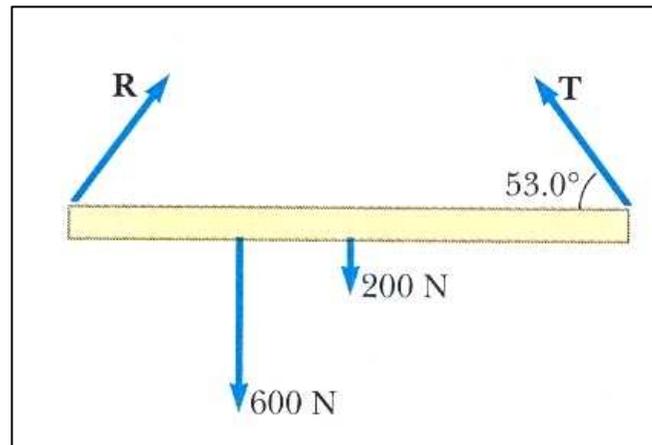
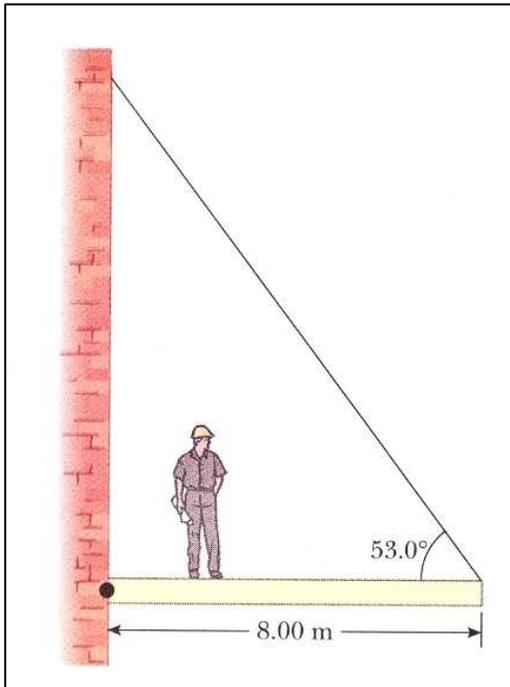
Uma ponte de 40 metros e peso de 10^6 N está apoiada em dois pilares de concreto. Que força exerce cada pilar na ponte quando um caminhão de 20 toneladas está parado a 10 metros de um dos pilares? O que acontece com estas forças à medida em que o caminhão transita?

Resposta: $6.5 \times 10^5 \text{ N}$ e $5.5 \times 10^5 \text{ N}$

Exemplos de Equilíbrio Estático

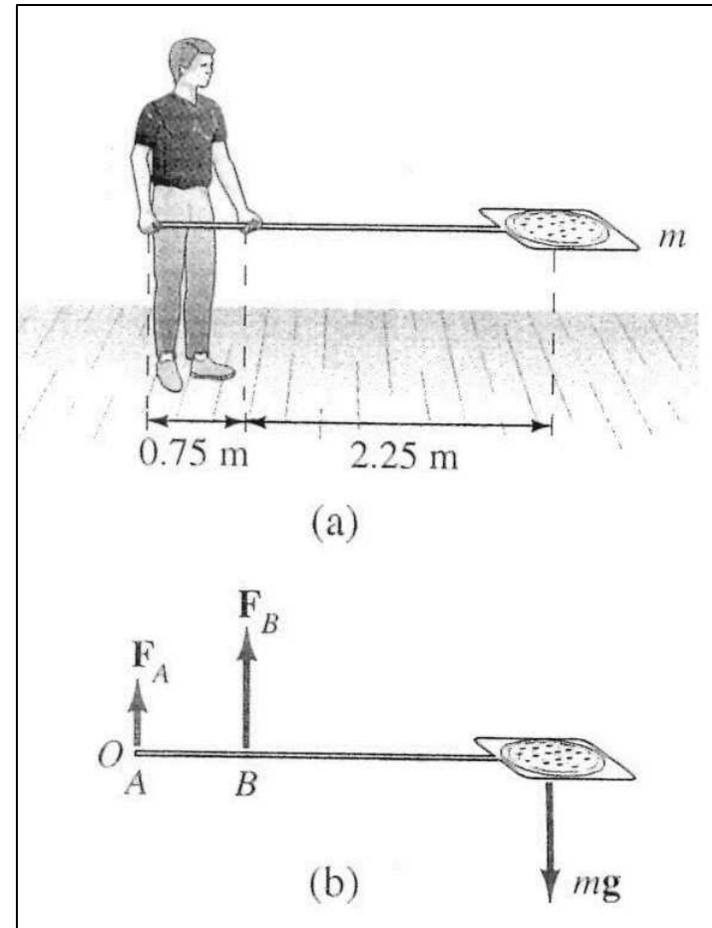
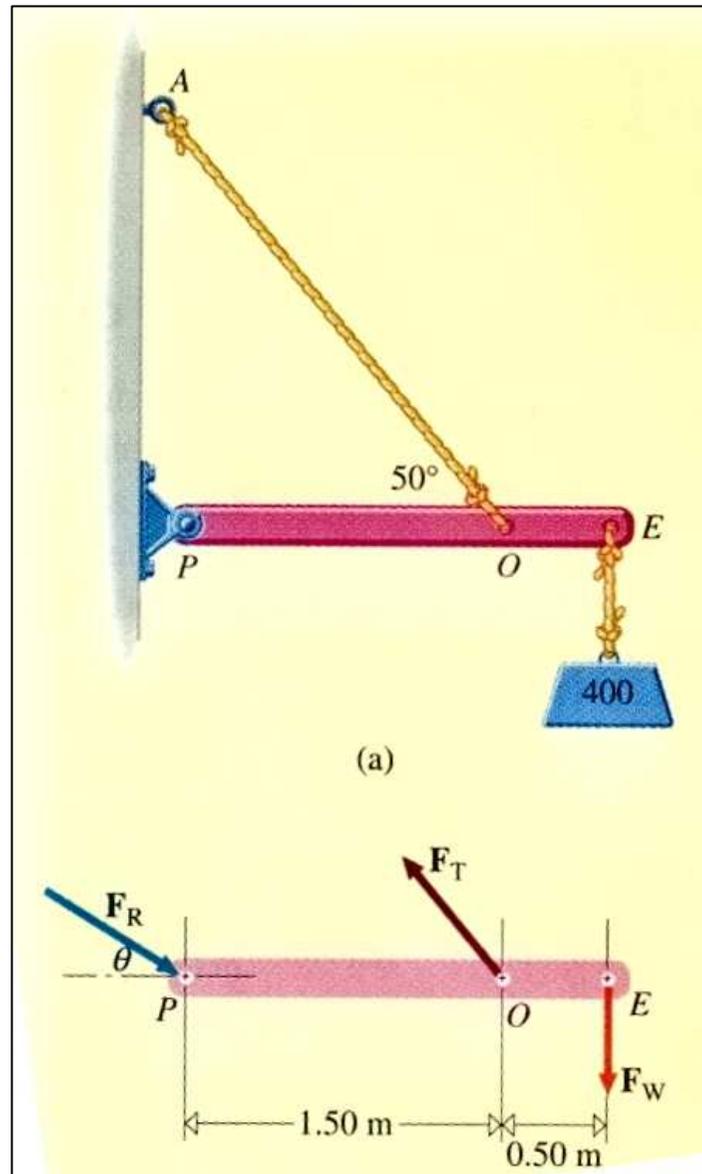
Uma viga de 200 N de peso e 8 m de comprimento, está articulada por uma extremidade a uma parede e é mantida na horizontal por um cabo de sustentação fixo conforme o esquema da figura. Uma pessoa de 61 kg se posiciona de pé a 2 m da parede. Encontre a tensão no cabo e a força exercida pela parede na viga.

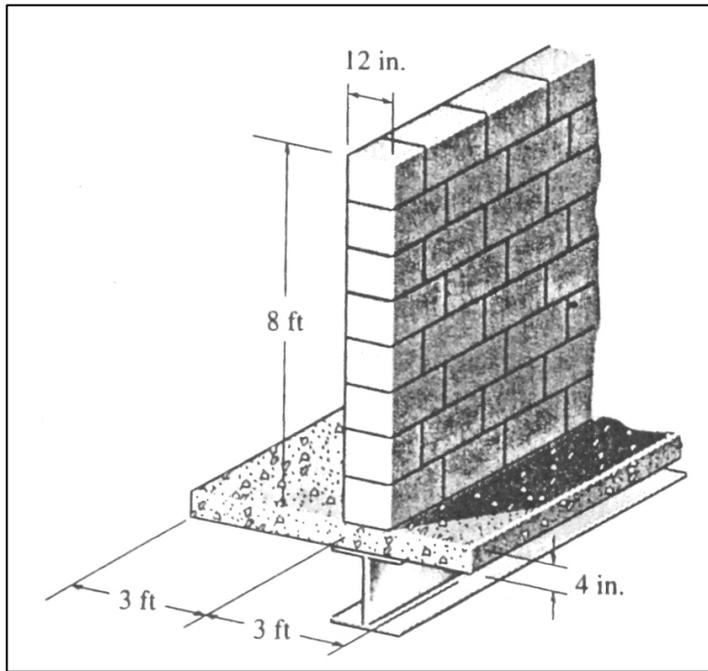
Solução: $T = 313 \text{ N}$ e $F = 581 \text{ N}$



“Physics” R. Serway (1996)

Outros exemplos de Equilíbrio Estático





Unidades Inglesas

Uma viga metálica é utilizada para suportar uma laje de concreto leve de 6 pés (*ft*) de largura e 4 polegadas (*in*) de espessura. Acima da laje há uma parede de blocos de concreto de 8 pés de altura e 12 polegadas de largura. A carga da laje é de 9 ($\text{lb}/\text{ft}^2 \text{ in}$) e o da parede é de 55 lb/ft^2 . Determine a carga sobre a viga por unidade de comprimento da parede

Solução:

Carga da laje: $\left(9 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2 \text{ in}}\right) (4 \text{ in}) (6 \text{ ft}) = 216 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$

Carga da parede: $\left(55 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2}\right) (8 \text{ ft}) = 440 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$

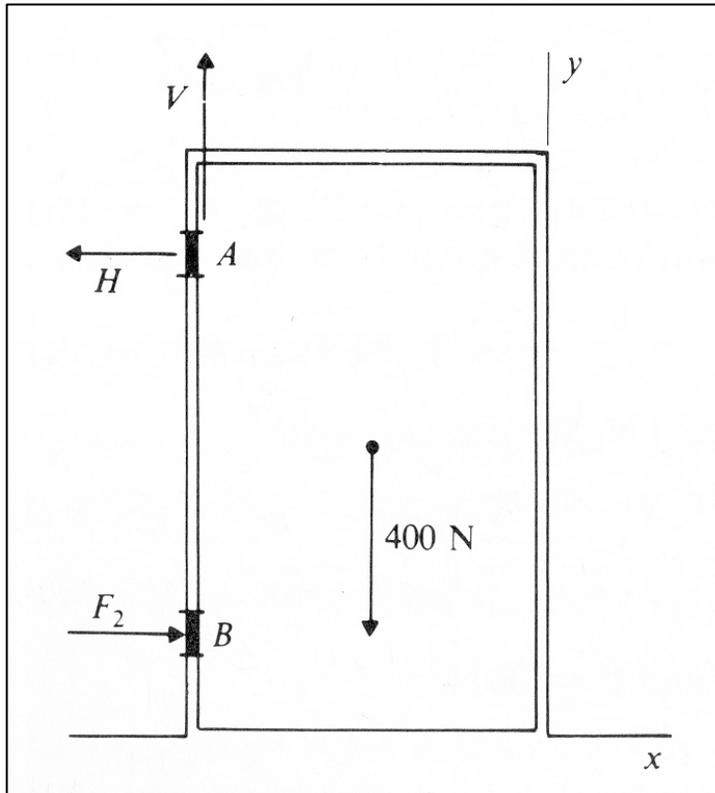
Carga total: $656 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$

o que equivale a 968 kg/m

Equilíbrio de uma porta

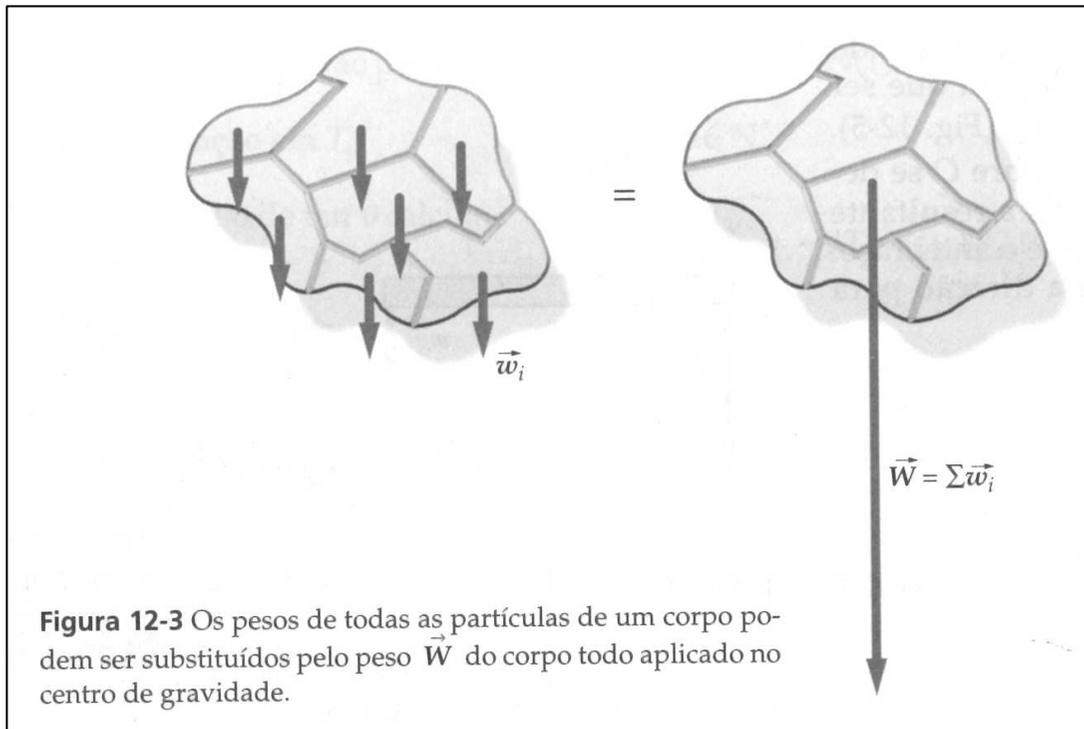
Uma porta de 40 kg tem duas dobradiças separadas por $h = 2.5$ m. A largura da porta é $h/2$. Admitindo que a dobradiça superior suporta o peso da porta, calcular o módulo e a direção das forças exercidas pelas duas dobradiças sobre a porta. A figura mostra as forças que atuam na porta

Resposta: $H = 100$ N e $V = 400$ N. A força resultante na dobradiça superior é 412 N e $\theta = 76^\circ$



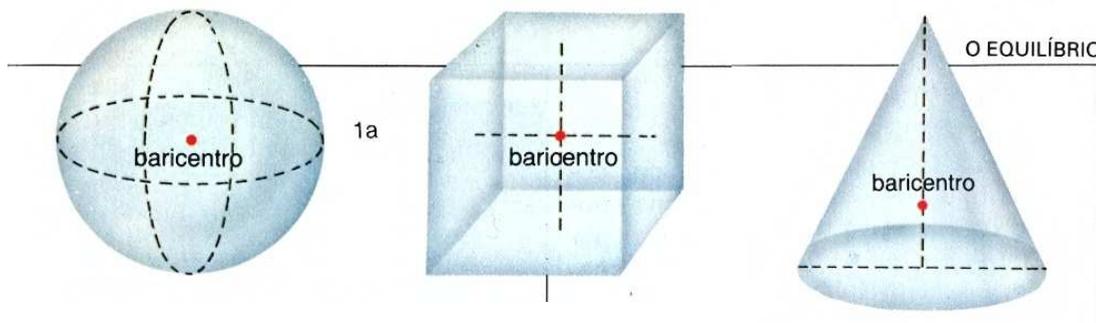
A figura mostra as forças que atuam na porta. Na dobradiça inferior apenas atua a força horizontal F_2 . Na dobradiça superior atua o peso V da porta e a força H que empurra a porta para esquerda.

Ref: F.J. Bueche. *Physics*
(8th edition, McGraw Hill, 1989)

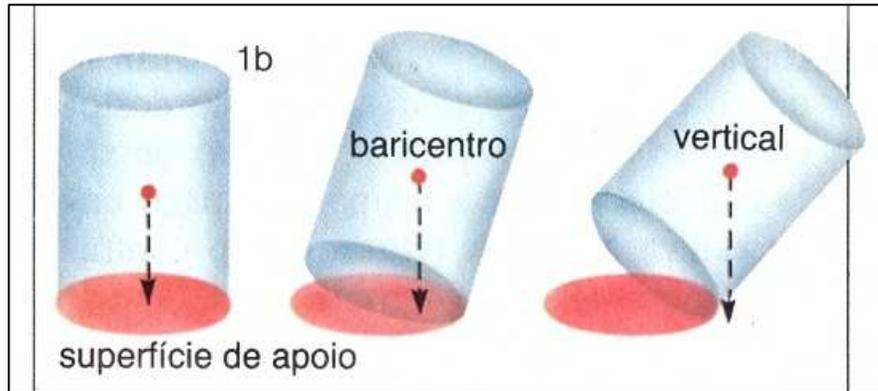


O Centro de Gravidade

A figura mostra um corpo dividido em diversas partes. O peso de cada parte é w_i e o peso total do corpo é $W = \sum w_i$. Podemos imaginar este peso total concentrado num único ponto, de modo que se o corpo fosse apoiado no ponto estaria em equilíbrio estático. Este ponto, pelo qual passa a resultante das forças exercidas pela gravidade sobre todas as partículas do corpo é o **centro de gravidade** ou **baricentro**.

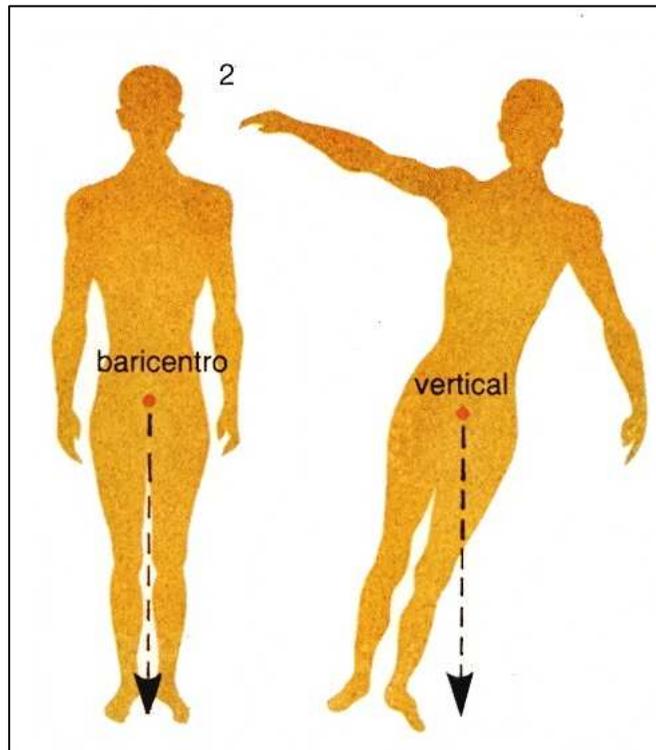


Em um sólido regular e homogêneo, o baricentro coincide com o centro geométrico do objeto



Um corpo está em equilíbrio estável quando, forçado a deslocar-se de sua posição, retorna naturalmente a ela.

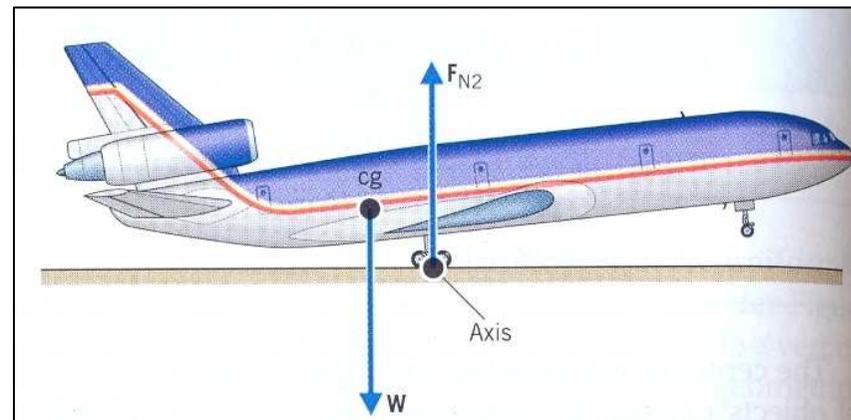
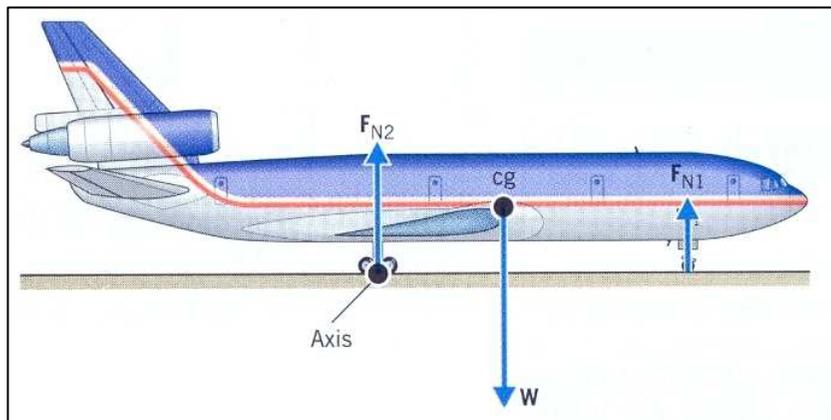
Esse tipo de equilíbrio ocorrerá enquanto a vertical que passa por seu **baricentro** cair dentro da superfície de apoio desse corpo.



Quanto menor for essa superfície (caso do corpo humano, em que a planta dos pés é pequena em relação à altura), maior o esforço necessário para mantê-lo em equilíbrio

Enciclopedia *Conhecer Atual*: Ciências
(Editora Nova Cultura, 1988)

Perda de equilíbrio: a vertical que passa por o centro de gravidade cai fora da superfície de apoio, definida pelas rodas da aeronave

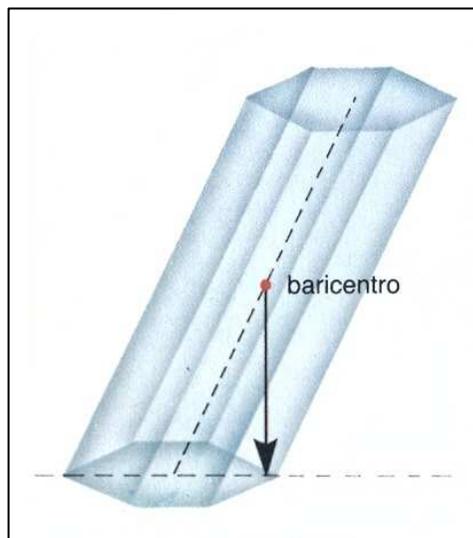


J.D. Cutnell, K.W. Johnson, Physics (3rd edition, Wiley, 1995)



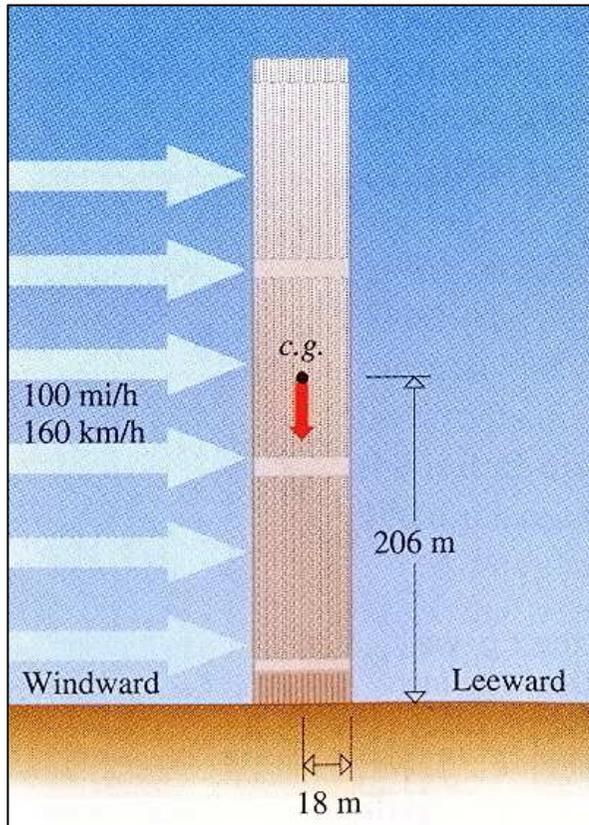
Torre de Pisa

A torre inclinada de Pisa tem 55 m de altura e 7 m de diâmetro. O topo da torre está deslocado de 4.5 m da vertical. A taxa de movimento do topo, em 1992, era de 1 mm/ano. Considere a torre como um cilindro uniforme. O centro de gravidade estará no centro do cilindro. Determine (a) o deslocamento vertical, medido no topo, irá fazer com que a torre fique na iminência de tombar (b) o ângulo com a vertical que a torre fará nesse momento



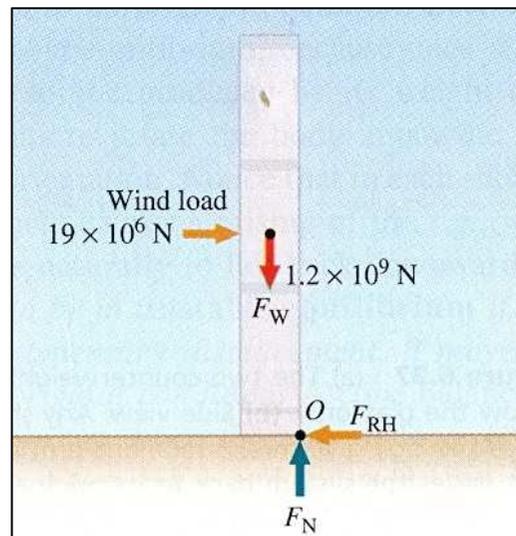
Respostas: (a) 2.5 m (b) 7.3°

Ventos fortes sobre edificações



Prédios muito altos experimentam cargas muito pesadas por causa dos fortes ventos e, por isso precisam estar ancorados em fundações profundas. Numa tormenta, cada torre de 1.2×10^9 N de peso do *World Trade Center* oscilava 7 pés para cada lado.

Como a área de frente era de 1.6×10^4 m², um vento de 160 km/h produzia uma pressão de 1.2×10^3 N/m², dando carga total de 19×10^6 N. Supondo que esta carga atua sobre o c.g. no centro da torre, o **torque produzido pelo vento** (sentido horário) pode ser estimado em: $(19 \times 10^6 \text{ N})(206 \text{ m}) = 3.9 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}$



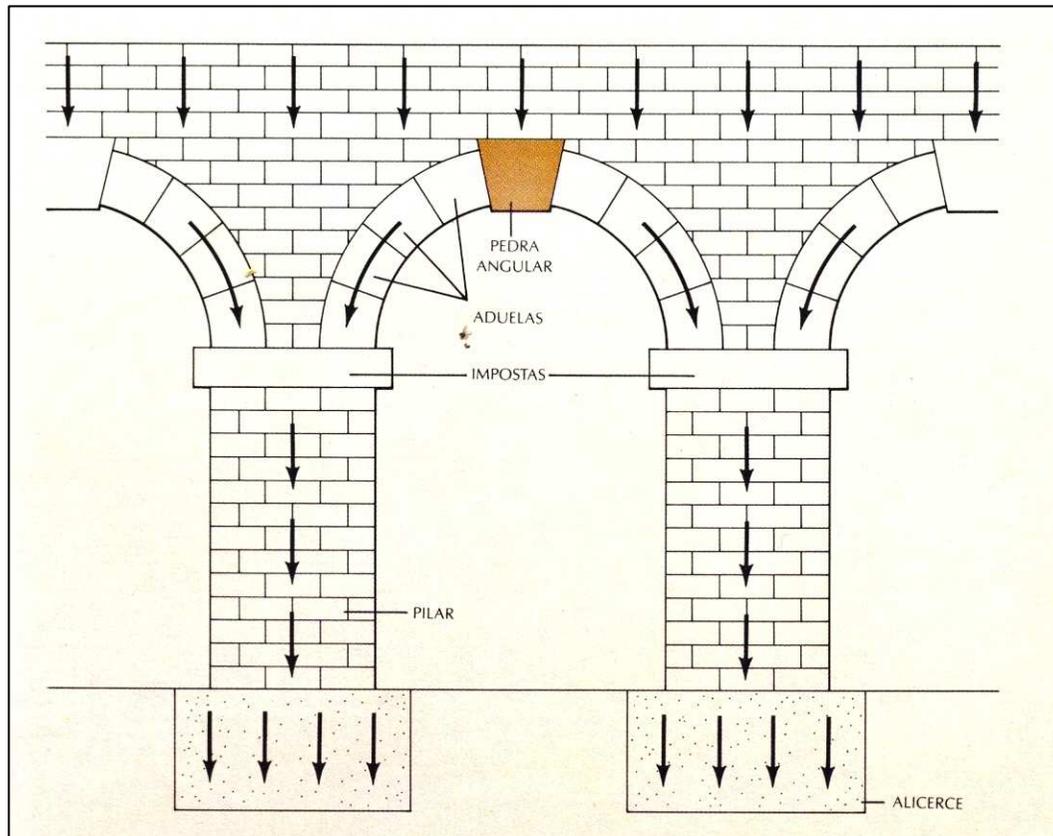
Por outra parte, o **torque produzido pelo peso da torre**, sentido anti-horário : $(1.2 \times 10^9)(18 \text{ m}) = 2.3 \times 10^{10} \text{ N}\cdot\text{m}$
A torre estava bem ancorada no chão e ficava de pé.

E. Hecht: *Physics* (Brooks/Cole Publ. Co, 1994)

O arco: símbolo do poderio romano

A força graciosa do arco, uma forma herdada dos etruscos, foi habilmente explorada para sustentar pesados aquedutos sobre vales.

Os arcos solitários precisavam de pilares possantes para absorver a pressão que a curva exercia do centro para fora



Numa cadeia de arcos, no entanto, diminuía a pressão sobre as pilastras e a construção se tornava mais econômica. Como mostra a figura, o empuxo dos arcos contíguos resolvia-se verticalmente nos pilares e a carga era transferida com segurança para os alicerces. O conhecimento do arco levou à abóbada.

Aqueduto sobre três níveis de arcos da *Pont du Gard*



Famosos por suas realizações em engenharia, os romanos se orgulhavam particularmente dos aquedutos. Este, ao norte de Nimes, França, foi construído no século I a.C. Mede 49 m de altura por 270 m de largura, e leva água da cidade de Uzes, a uns 24 km de distância.



O mercado municipal de [Esmirna](#) foi projetado e construído pelos romanos quando o primitivo foi destruído por um terremoto. Esta arcada, duas vezes milenar, formava no subsolo, o primeiro plano de uma estrutura maciça de três andares.

Biblioteca de História Universal Life: *Roma Imperial*
Livreria José Olympio Editora, 1980

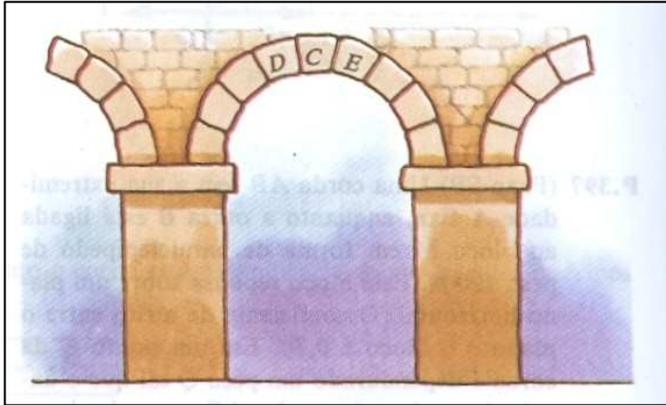


Aqueduto de Segóvia

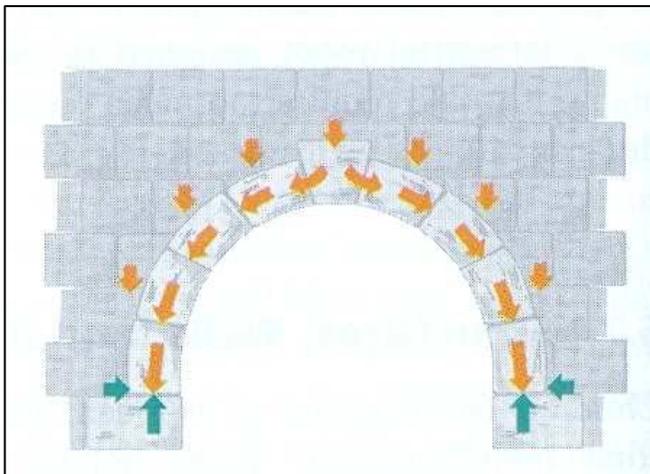
Espanha

Seus arcos, em duas ordens superpostas, na extensão de 800 metros, formam a parte final de um sistema de cerca de 100 quilómetros construídos pelos romanos para trazer a cidade a água das nascentes situadas nas montanhas.

Biblioteca de História Universal Life
Roma Imperial
José Olympio Editora, 1980



A propriedade mais notável do arco é que as pedras que o compõem permanecem em equilíbrio devido somente às forças mútuas de contato, sem necessidade de argamassa para cimentá-las umas às outras. Cada pedra atua basicamente em compressão. A estrutura do arco canaliza a carga para a base



Considere que o arco representado na figura está em equilíbrio e que cada uma de suas pedras tem massa 15 kg. Determine a direção e o sentido da resultante das forças que as pedras laterais, D e E , exercem sobre a pedra central C e calcule seu módulo.

Resposta: vertical, para cima, de 150 N

Hecht, *Physics* (Brooks/Cole Publ. Co)
F. Ramalho: *Física* (Editora Moderna)

Exemplo da técnica construtiva romana: Basílica de Majencio e de Constantino



Os arcos triplos da **Basílica** (306 a 312 d.C.) domina a extremidade oriental do Foro romano. Os terremotos reduziram a estrutura a um terço de seu tamanho original. Os arcos remanescentes, cada um com 24 m de altura e 20 de largura, faziam parte do interior abobadado. Servia para a administração da justiça e direito civil.

E. Pucci, *Toda Roma*. Bonechi editore

O Panteão



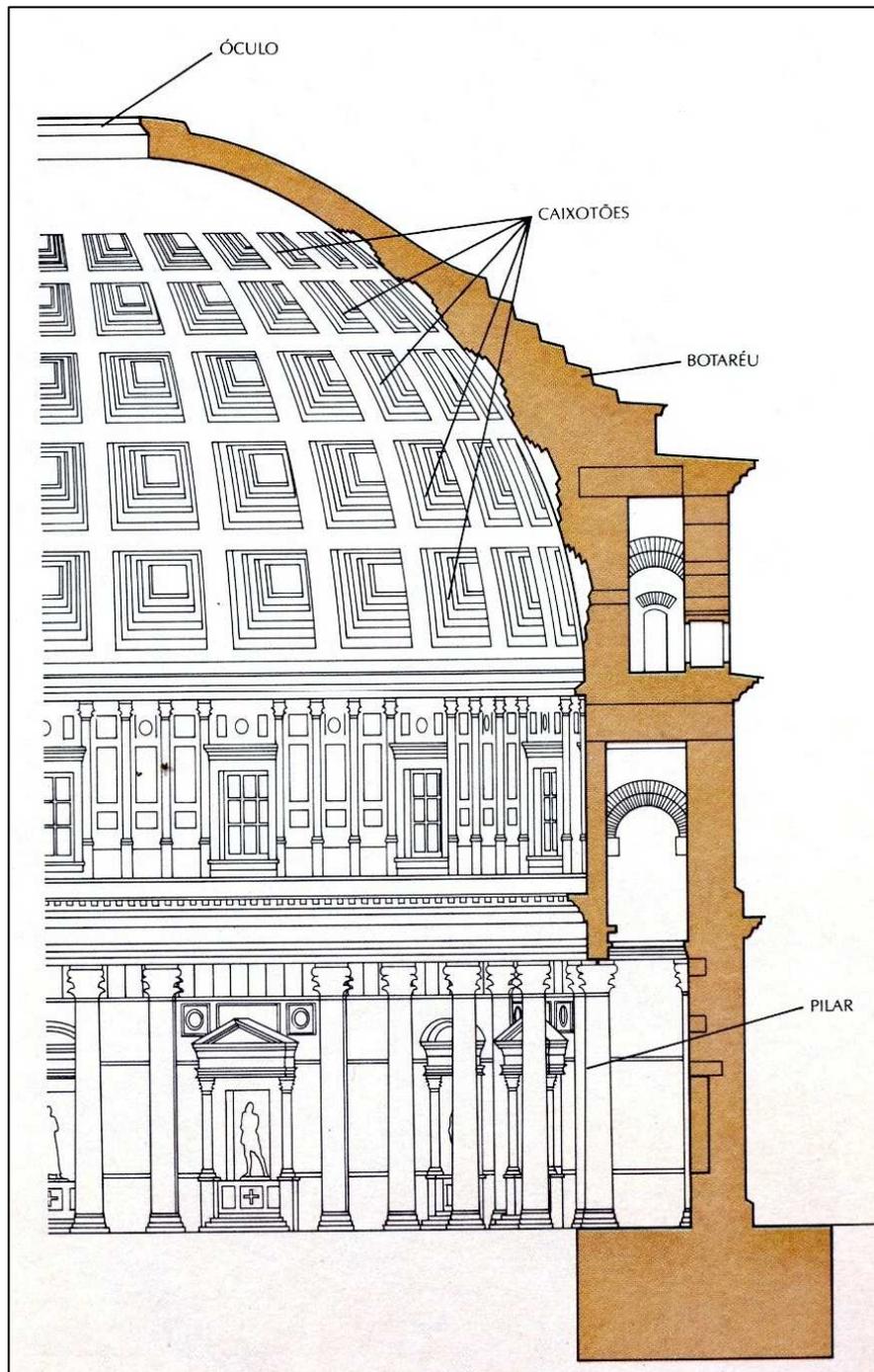
Por volta de 120 d.C., o imperador Adriano, homem culto e apaixonado pela arquitetura, encomendou uma edificação que ficaria como monumento às mais altas aspirações da Roma imperial. O **Panteão** substituiu um antigo templo erigido em 27 a.C. por Marcos Agripa.

A imensa fachada em colunatas quase obscurece o restante da estrutura. As colunas coríntias do pórtico estão distribuídas em três fileiras. Cada um dos fustes de granito têm 60 toneladas e mede 12.5 m de altura por 1.5 m de diâmetro.

E. Pucci, *Toda Roma* (Bonechi editore)
Civilizações perdidas: *Roma* (Time - Life & Abril Coleções)



O amplo espaço interno do Panteão está dominado pela admirável abobada. A luz ilumina o salão despido de janelas através de um orifício na parte superior. Moldados na superfície interna do domo de concreto há 140 divisões quadradas ornamentadas com relevos, dispostos em 5 fileiras horizontais de 28 elementos cada uma, que vão diminuindo de tamanho em direção ao topo.

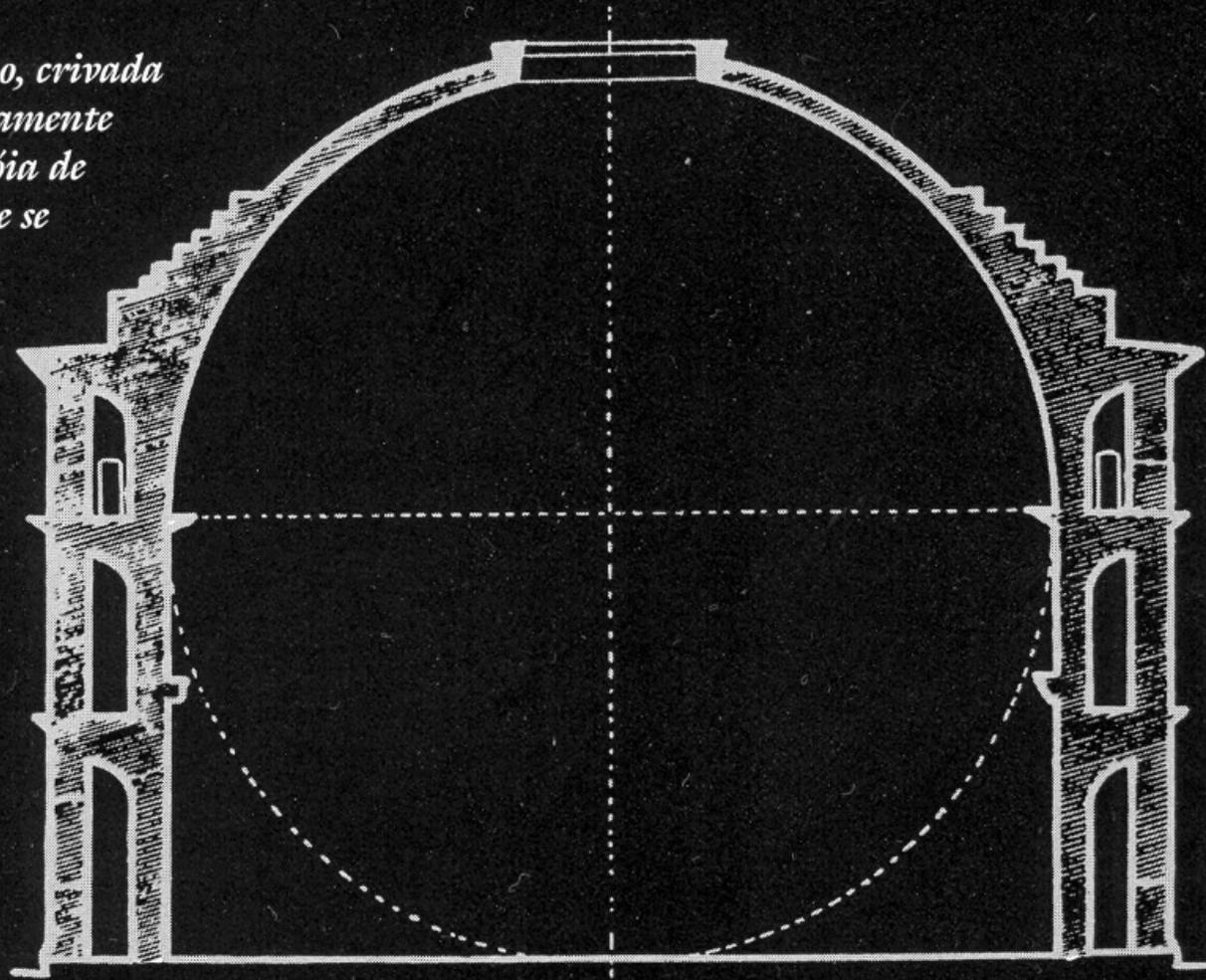


O salão interior do **Panteão** é uma vasta rotunda coberta cujo diâmetro equivale à altura. Reforçada por uma rede de arcos presos às paredes (para aliviar a tensão) a estrutura se assenta sobre um alicerce circular de concreto com mais de 7 metros de largura e 4.5 de profundidade, do qual se elevam 8 **pilares** de concreto distanciados para criar os 7 recuos (nichos). Cada pilar foi disfarçado como fachada do templo, com colunas caneladas e um pedestal para estátuas.

O domo foi ornamentado de **caixotões** para reduzir o peso e escorado do lado de fora com **botaréus** à maneira de degraus de escada.

História em Revista: Impérios em ascensão.
Time Life & Editora Cidade Cultural, 1990

A maciça abóbada do Panteão, crivada de caixotões, se eleva majestosamente até o óculo (acima), a clarabóia de quase 9 metros de largura que se abre para o céu. Obedecendo ao esquema de uma esfera perfeita (à direita) de 43 metros de diâmetro, esta cúpula é a mais ampla realizada na Antigüidade.



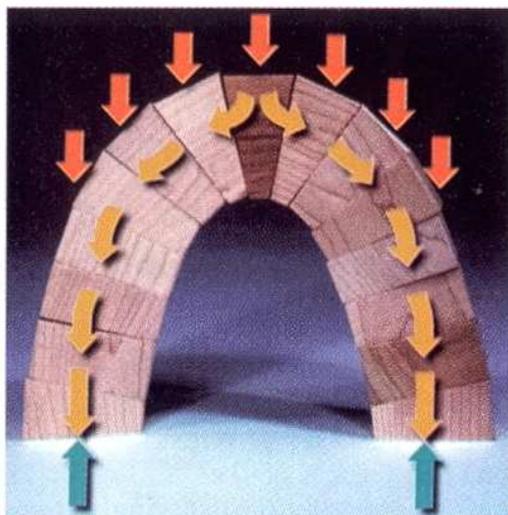


Em 609 d.C., o imperador Focas ofereceu o edifício ao Papa Bonifácio IV, que o transforma em uma igreja, a de *Santa Maria dos Mártires*. Com o tempo, várias torres foram adicionadas ao pórtico.

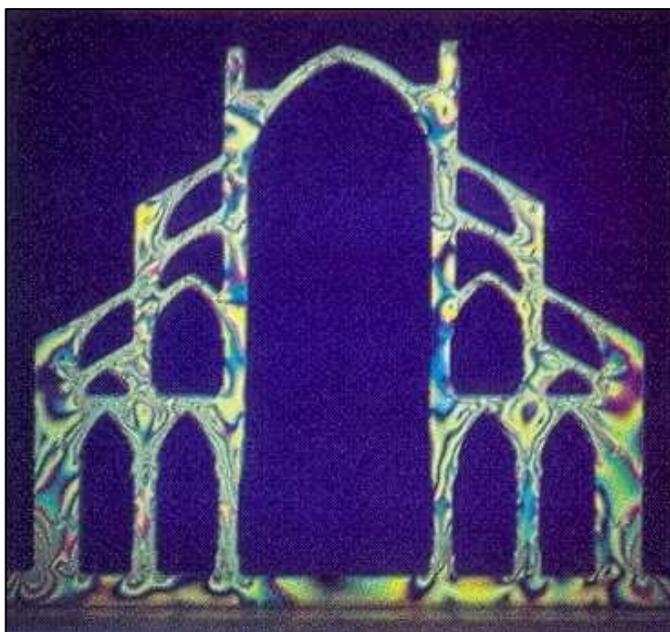
Atualmente o Panteão continua a ser uma igreja, mas é também um santuário nacional, onde estão enterrados dois reis italianos e o mestre do Renascimento Rafael.

O edifício permanece essencialmente idêntico ao que era na época de sua construção, sendo um dos mais completos e esclarecedores testemunhos da arquitetura do mundo clássico.

Civilizações perdidas: *Roma*
(Time - Life & Abril Coleções)

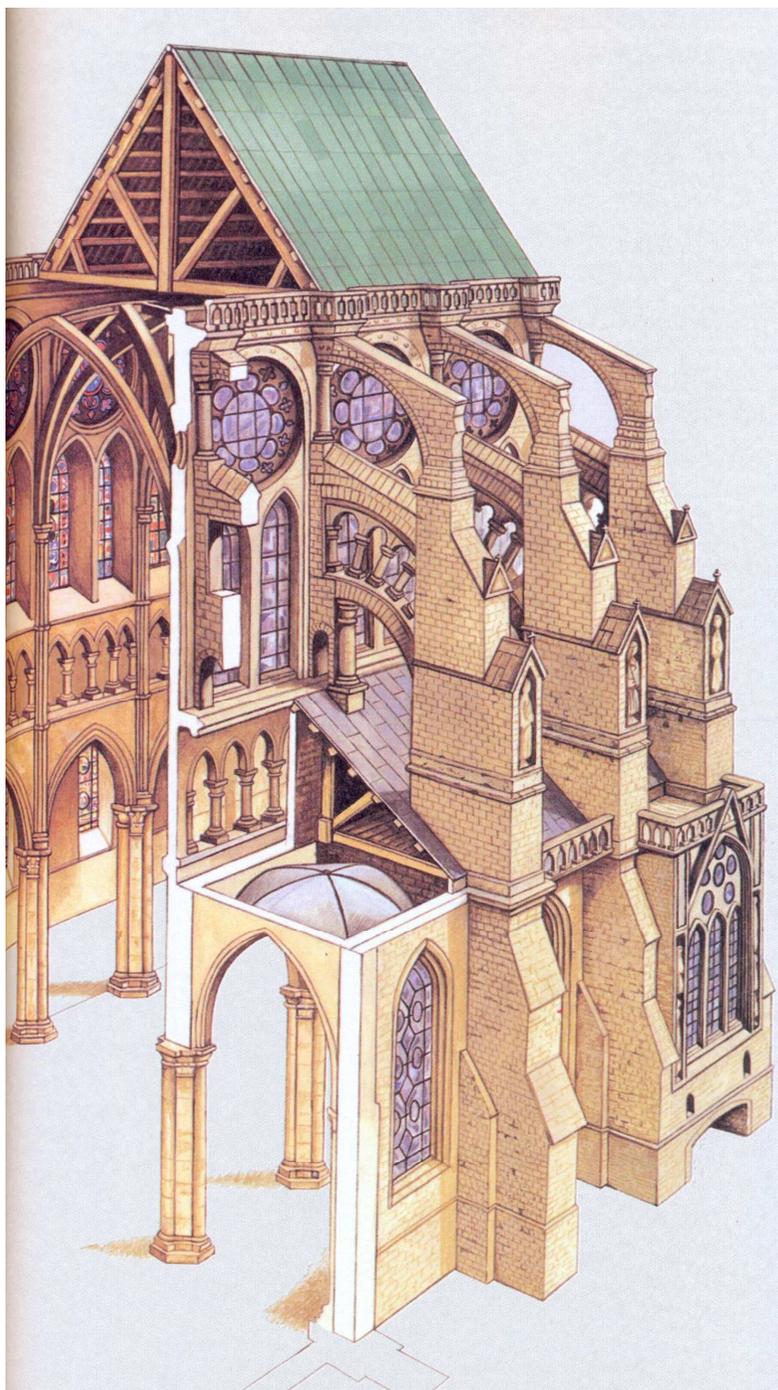


O **arco gótico** foi uma das grandes invenções da idade média. Ocupando o mesmo espaço com arcos elevados as forças de reação horizontal são reduzidas. Estes arcos elevados canalizam a carga diretamente para o solo. Nesta estrutura não há esforços laterais, como no **arco circular**. Como resultado, as paredes podem ser mais leves e delgadas. Isto possibilitou a arquitetura das catedrais góticas



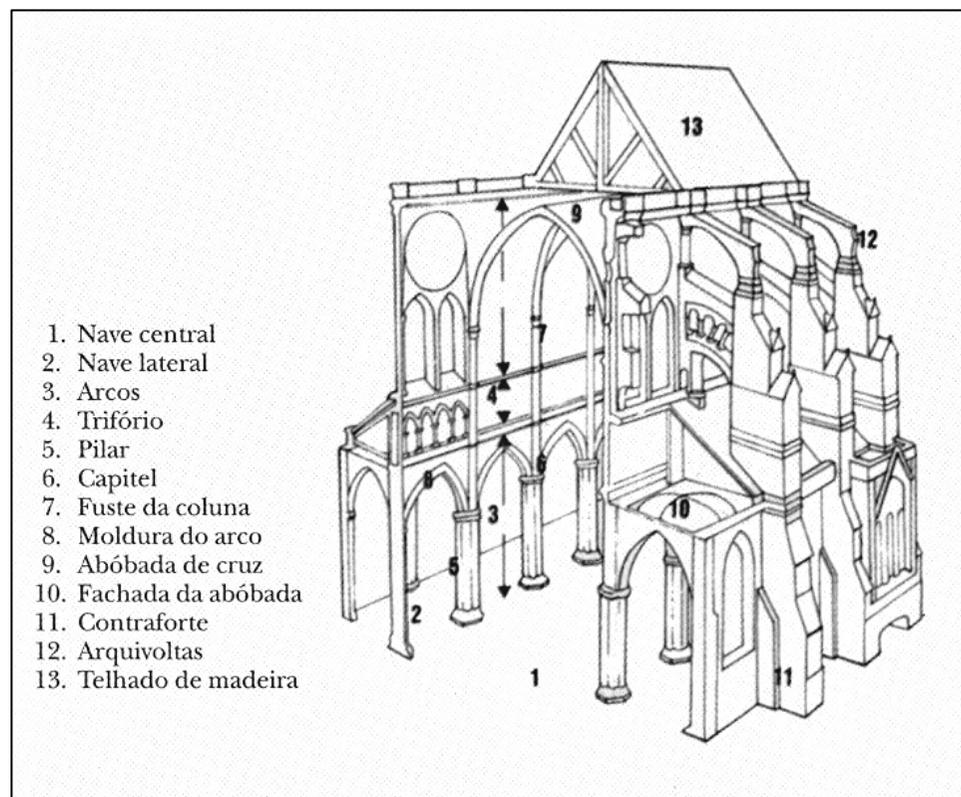
Modelo de acrílico (plástico) de uma estrutura de arco submetido a esforço. A fotografia é feita com luz polarizada, o que permite observar as regiões onde os esforços são maiores. Estes modelos são de muita utilidade para otimizar os projetos de arquitetura.

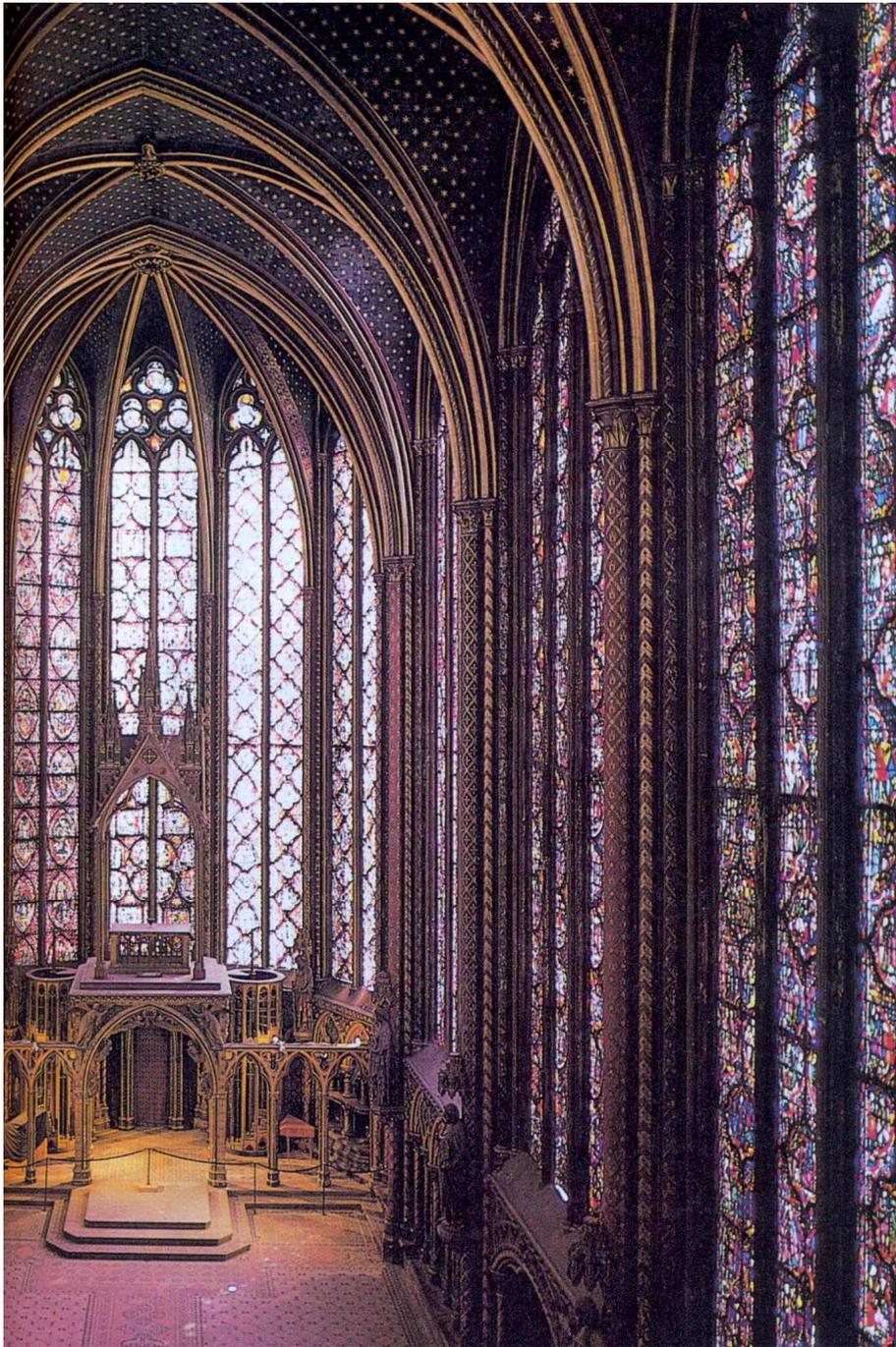
E. Hecht, *Physics*. Ed. Brooks/Cole Publ. 1994
R. Serway, *Physics*. Ed. Saunders College, 1996



Catedral gótica de Chartres (1240)

O uso do arco ogival e da abóbada de cruz representa uma nova flexibilidade na estrutura. Isto permitiú ao arquiteto arredondar as arestas, reduzindo o volume de alvenaria. As arquivoltas permitem reduzir a estrutura.



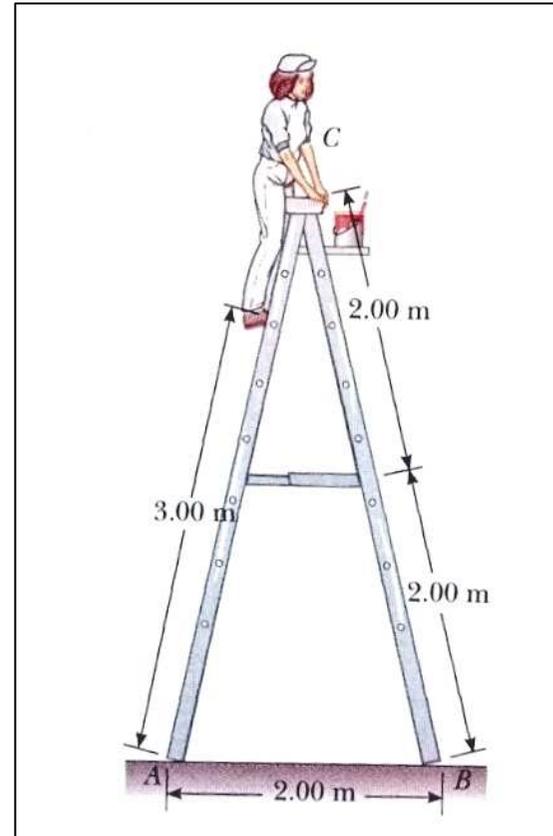
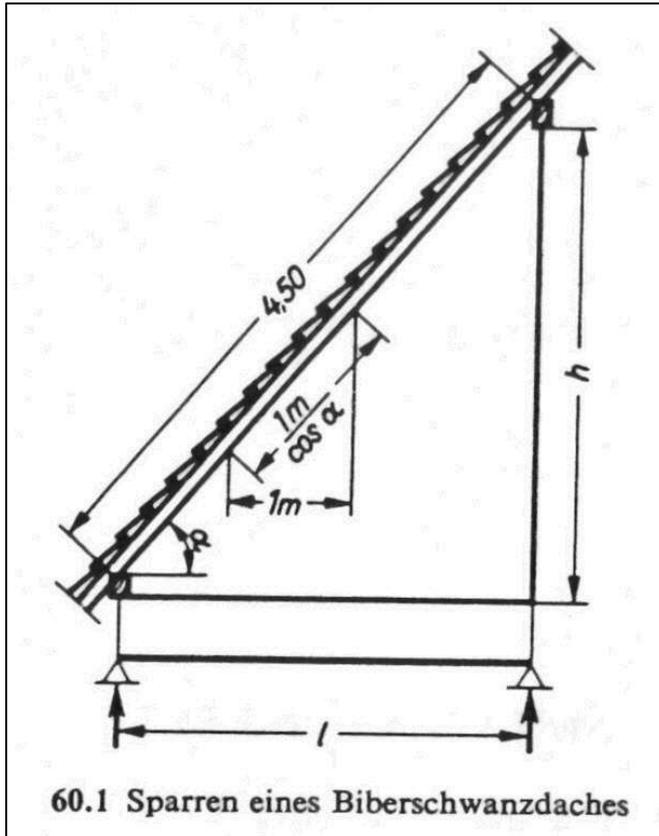
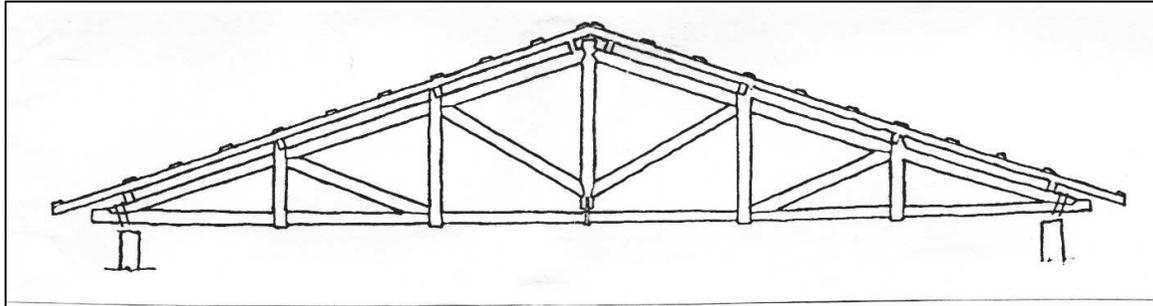


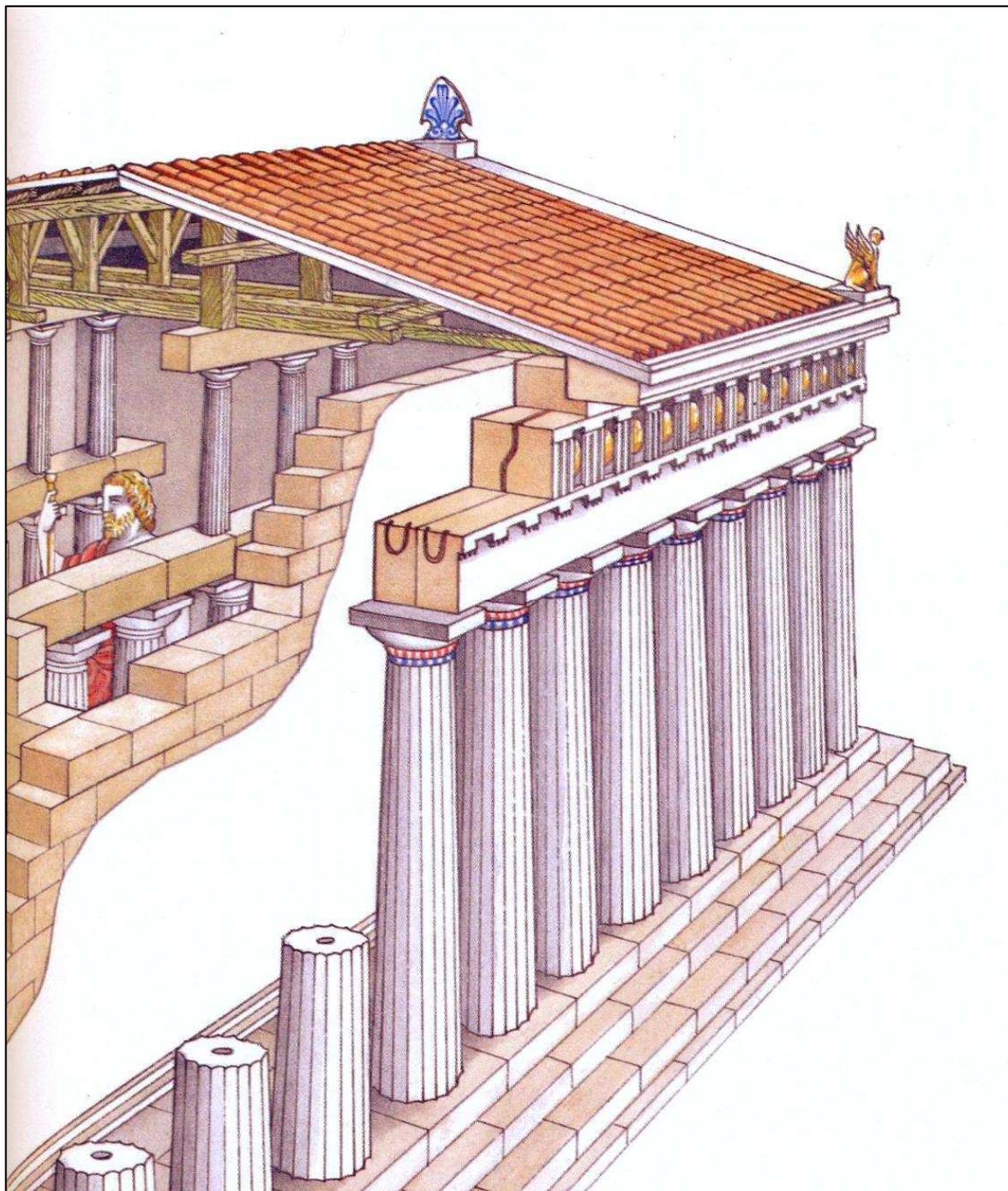
As paredes foram transformadas em cristais reforçados por delicadas nervuras conseguindo-se desse modo que ganhassem em elegância.

O sucesso arquitetônico da Catedral de Chartres prestou-se a todo tipo de imitações. O estilo gótico que corporificava tornou-se o modelo internacional até o século XV, e as catedrais góticas foram construídas por toda a Europa.

J. Ardagh, C. Jones, *França*
(Ediciones Folio, Barcelona, 2007)

Análise de estruturas tipo telhado

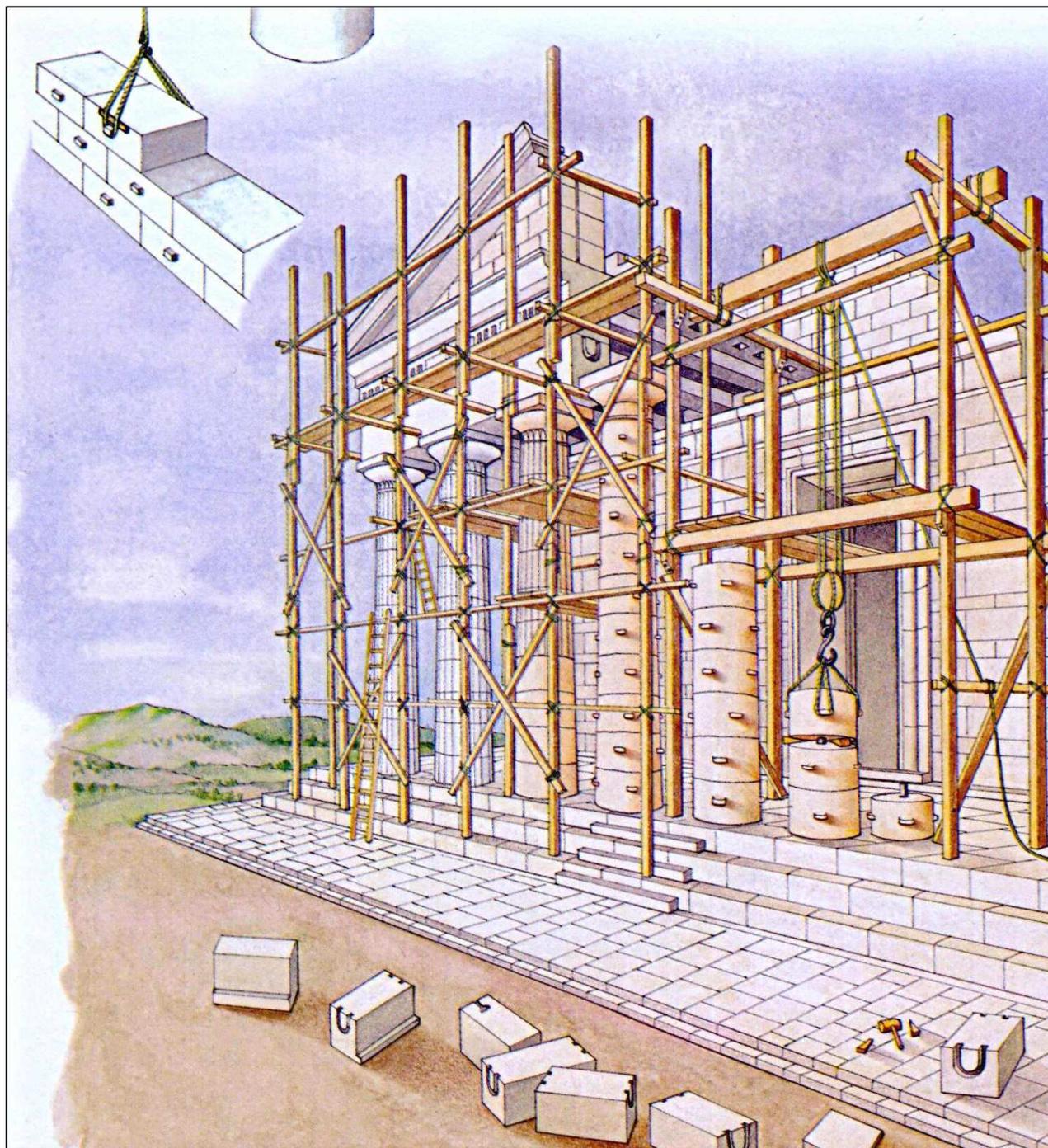




Templo Grego

Nesta reprodução de um típico templo grego são visíveis seus componentes arquitetônicos e decorativos. Os primeiros templos foram feitos com alicerces de pedra, armação de sustentação e travejamento de madeira, erguidos em tijolos crus rebocados. As colunas da *peristasis*, que ocupavam ao menos tres lados do edifício, ajudavam a sustentar o teto. A partir de X – VII a.C., o templo assume dimensões monumentais.

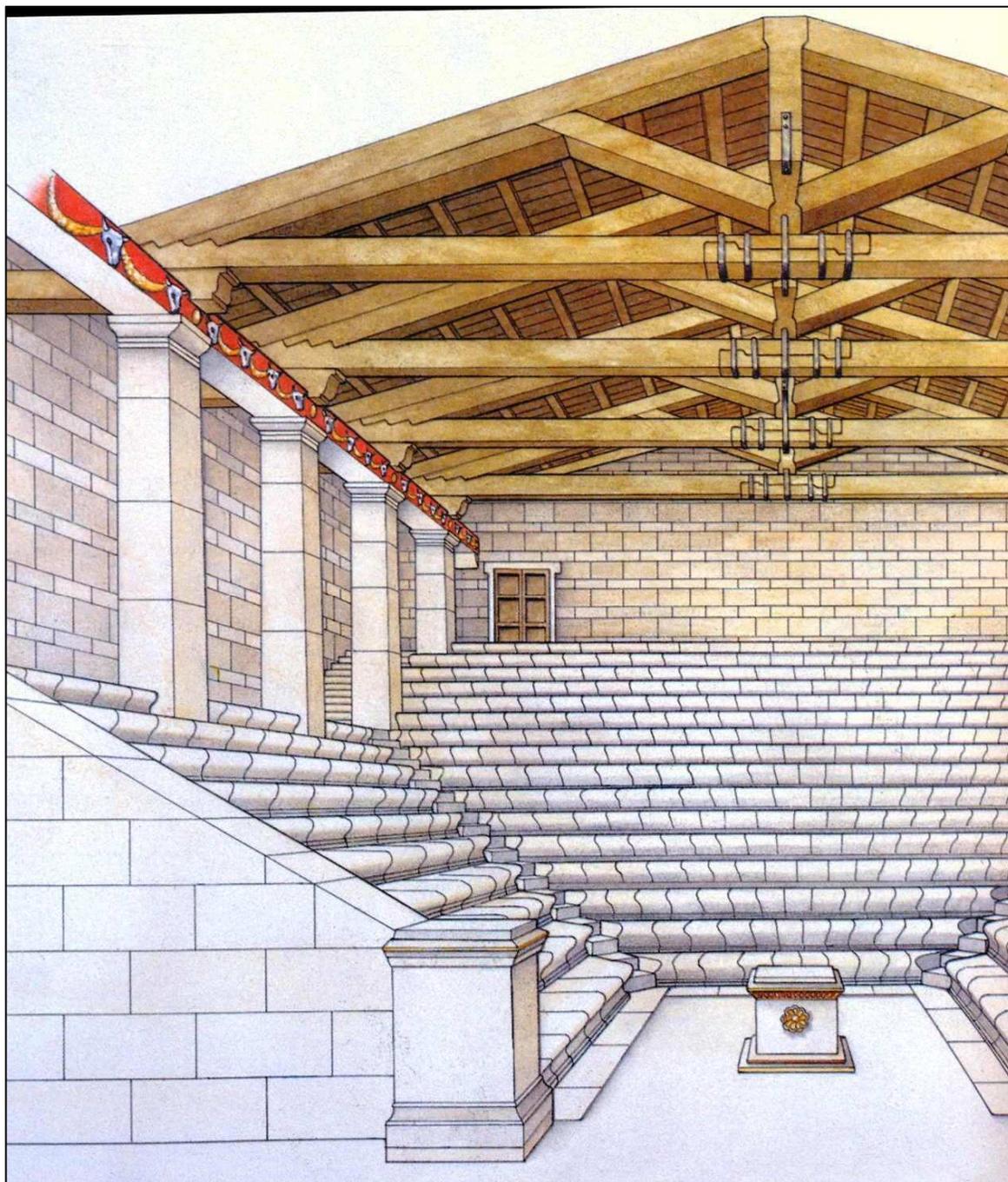
F. Durando, *A Grécia Antiga*
Editora Folio, 2005



Adoção da andaimarias e sistemas de elevação dos blocos na construção de um templo de pedra

Os blocos podiam apresentar saliências, caneluras, pegas ou encaixes a que se podiam prender laços, ganchos metálicos e cunhas

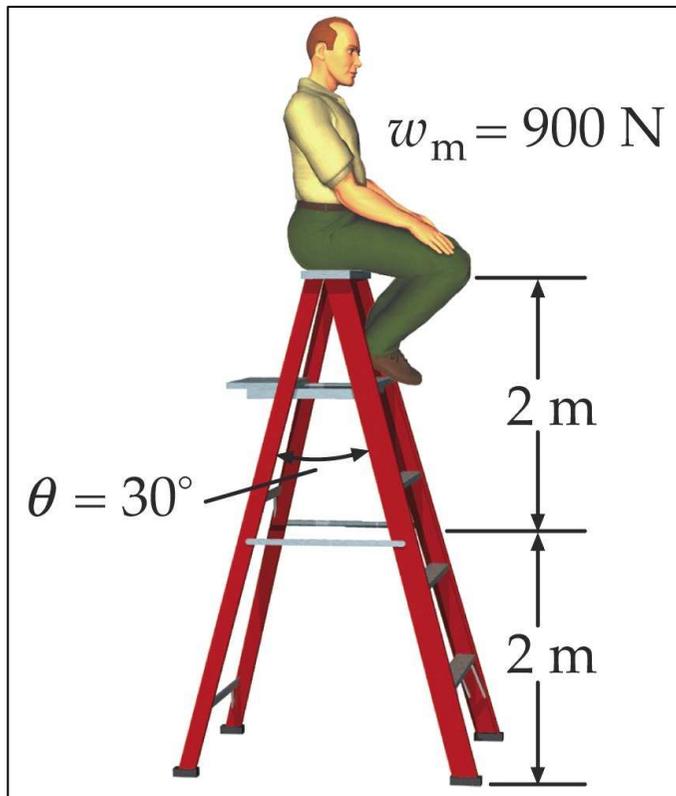
F. Durando, *Grécia Antiga*
Editora Folio, 2005



Ekklesiasterion de Priene

Ampla sala para as assembleias de Priene, antiga polis da Cária. Século IV a.C. A cobertura estava apoiada sobre fortes armações de madeira. A espetacular impressão que causava o teatro, o estádio e outras infra-estruturas representa o aspecto mais interessante de Priene, que se antecipa em mais de meio século às cidades helenísticas cenográficas da Asia Menor.

F. Durando, *A Grécia Antiga*
Editora Folio, 2005



Uma pessoa de 900 N de peso está no topo de uma escada de duas pernas. A meia-altura da escada há uma travessa de segurança. O ângulo de abertura, no topo, é $\theta = 30^\circ$

- (a) Qual é a força exercida pelo piso sobre cada perna da escada?
- (b) Calcular a tensão na braçadeira.
- (c) Se a braçadeira for fixada mais baixo, sua tração será maior ou menor?

Respostas:

- (a) 450 N (b) 241 N (c) a tensão diminui.



Ubatuba, SP



Aeroporto Charles De Gaulle