FCI 307 – Termodinâmica

Lista 6

Referência: Capítulos 1, 2 e 4 do livro "Introdução à Física Estatística" de Sílvio Salinas.

(1) Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo secreto (ou amigo oculto). Cada nome é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna, e cada participante retira um deles ao acaso. Qual é probabilidade de que nenhum participante retire seu próprio nome? (FUVEST 2017)

(2) Um bêbado move-se em uma dimensão (e.g. uma corda bamba) dando passos de comprimento l com igual probabilidade para frente ou para trás a cada intervalo de tempo τ. Obtenha: a) a expressão para a probabilidade $P(m, N)$ de encontrar o bêbado a m passos de sua posição inicial após N intervalos de tempo, b) a relação de recorrência envolvendo $P(m, N+1)$ e $P(m, N)$, e c) a equação diferencial satisfeita pela probabilidade $P(x, t)$ (sendo $x = ml$ e $t = N\tau$) no limite de l, τ pequenos, com $D = l^2/2\tau$ constante.

(3) Verifique que a distribuição de probabilidade $P(m, N)$ deduzida no problema anterior (distribuição binomial) tende a uma gaussiana de média zero e "largura" proporcional a $\sqrt{N}$ para N grande. **Dica:** considere o comportamento do logaritmo de $P(m, N)$, suponha que sejam grandes os números de passos (para frente, para trás e no total), use a aproximação de Stirling, depois note que $\ln P(m, N)$ será concentrado ao redor de seu ponto de máximo e, portanto, pode ser bem representado pelo expansão de Taylor ao redor dele. A função gaussiana obtida no limite $P(m, N) \to P(x, t)$ satisfaz à equação diferencial obtida no problema anterior?

(4) Problema 6 do Cap. 1 do Salinas.

(5) Problema 1 do Cap. 2 do Salinas.

(6) Problema 7 do Cap. 2 do Salinas.

(7) Considere a partição "1" (contendo N_1 partículas) de um sistema isolado de energia total (constante) E_0 e volume total V_0, sendo que a parede entre a partição e o restante do sistema (que chamaremos de partição "2") é diatérmica e móvel. Escreva a probabilidade $P(E_1, V_1; E_0, V_0)$ de encontrar a partição 1 com energia E_1 e volume V_1, em termos dos números de estados $\Omega_1(E_1, V_1)$ e $\Omega_2(E_2, V_2)$ respectivamente para as partições 1 e 2 com energias E_1, E_2 e volumes V_1, V_2. Tomando agora o logaritmo de $P(E_1, V_1; E_0, V_0)$, encontre as condições que devem ser satisfeitas na situação de máxima probabilidade. Em particular, interprete essas condições a partir da definição de entropia $S(E) = k \ln \Omega(E)$.

(8) Lembrando que o número de estados com energia E para o gá ideal de N partículas em um volume V é proporcional a $\Omega(E) = C_N V^N E^{3N/2}$, onde C_N é uma constante, calcule a entropia do gás como função de E e V. A partir dessa expressão, derive as equações de estado usuais para a energia e a pressão como funções de T, V e N.

(9) Considere o sistema de N spins 1/2 localizados na presença de campo magnético externo H, i.e. o paramagneto ideal de spin 1/2, cuja energia é dada pela hamiltoniana

$$\mathcal{H} \; = \; -\mu_0 H \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \, ,$$

onde $\sigma_j = \pm 1$ são as variáveis de spin e μ_0 é o módulo do momento magnético. Calcule o número de configurações $\Omega(E)$ das variáveis de spin correspondente a uma dada energia E para o sistema. A partir dessa expressão, tome o limite de N grande, e obtenha a entropia $S(E)$. Tome então a derivada de S para obter a temperatura T e, invertendo a expressão obtida, calcule $E(T)$.

(10) (**opcional!!**) Obtenha $E(T)$ para o sistema acima utilizando o ensemble canônico, ou seja, calcule a função de partição Z em função da temperatura inversa $\beta \equiv 1/kT$ e, a partir dela, obtenha $E = -\partial \ln Z / \partial \beta$.

(11) Problema 5 do Cap. 4 do Salinas.

(12) Vamos calcular o calor específico dos sólidos a partir do modelo de Einstein. Considere N osciladores quânticos de mesma frequência ω, cada um com energia dada por $\hbar\omega(n + 1/2)$, onde $n = 0, 1, \ldots, \infty$. Calcule o número de estados do sistema com energia total E (no limite de N grande), obtendo a entropia $S(E)$ e, a partir dela, a temperatura $T(E)$. Inverta agora essa expressão para obter a energia $E(T)$ e então o calor específico $c(T)$. Faça um gráfico de $c(T)$, mostrando os valores nos limites $T \to 0$ e $T \to \infty$. **Opcional:** repita para o ensemble canônico.

Provinha 6

Faça os problemas 5 e 12 acima para entregar (dia da prova 5/12).
Justifique todos os passos de sua resolução.