Mecânica Quântica Relativística: Exercícios

1. A energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio pode ser obtida pela minimização em relação ao raio r da expressão (não-relativística) para a energia de um estado ligado pelo potencial de Coulomb
$$E \;=\; \frac{p^2}{2m_e} \;-\; \frac{e^2}{r}\,,$$
usando-se a relação $p\,r = \hbar$ (princípio da incerteza). Obtém-se assim
$$E_{min} \;=\; -\frac{1}{2}\,\alpha^2\,m_e\,c^2\,,$$
onde a constante de acoplamento α é dada por $\alpha = e^2/\hbar\,c = 1/137$. Da mesma forma, utilize o potencial de Yukawa para a determinação do estado ligado do dêuteron em termos da constante de acoplamento forte $\alpha_s \;\equiv\; g^2/\hbar\,c$, onde g é a "carga" no potencial de Yukawa. Neste caso a energia pode ser escrita como
$$E_D \;=\; \frac{p^2}{M} \;-\; \frac{g^2\,\exp\left(-m_\pi\,c\,r/\hbar\right)}{r}\,,$$
considerando a massa reduzida $M/2$. Impondo a condição de estado ligado $E_D < 0$ obtenha uma desigualdade para α_s. (A energia de ligação do dêuteron é cerca de 2 MeV.)

2. Exercício 1. do primeiro capítulo do Bjorken & Drell.

3. Verifique que $\sigma_{\alpha\beta}$ dado pela Eq. (2.16) do Bjorken & Drell satisfaz a Eq. (2.15).

4. Ache a transformação unitária R que leva da representação de Pauli-Dirac para a representação de Weyl:
$$R\,\gamma^\mu\,R^{-1} \;=\; \tilde{\gamma}^\mu\,,$$
sendo que a representação de Pauli-Dirac é dada por
$$\gamma^0 \;=\; \beta \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i \;=\; \beta\,\alpha_i \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\,,$$

e a representação de Weyl é dada por

$$\gamma^0 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i \;=\; \beta\,\alpha_i \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Considere agora a representação de Pauli-Dirac na notação do Sakurai

$$\gamma_i \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -i\,\sigma_i \\ i\,\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_4 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcule $\gamma_5 = \gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3\,\gamma_4$.

6. Verifique que o momento angular orbital $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ não comuta com a Hamiltoniana de Dirac

$$H \;=\; c\,\alpha \cdot \mathbf{p} \,+\, \beta\,m\,c^2$$

mas $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ sim, onde

$$\mathbf{S} \;=\; \frac{\hbar}{2\,i}\,(\alpha_2\,\alpha_3, \alpha_3\,\alpha_1, \alpha_1\,\alpha_2)$$

pode ser interpretado como o operador de spin. Mostre que os autovalores de qualquer componente de S são $\pm\hbar/2$ e que os autovalores de S^2 são $3\,\hbar^2/4$.

7. Considere a equação de Dirac

$$\left(i\,\gamma^\mu\,\mathcal{D}_\mu \,-\, \frac{m\,c}{\hbar}\right)\psi \;=\; 0\,,$$

onde a derivada covariante $\mathcal{D}_\mu$ é dada por

$$\mathcal{D}_\mu \;=\; \partial_\mu \,+\, \frac{ie}{\hbar\,c}\,A_\mu \,-\, \frac{e}{4\,m\,c^2}\,k\,\gamma^\nu\,F_{\mu\nu}$$

e $F_{\mu\nu}$ é o tensor campo eletromagnético

$$F_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu\,A_\nu \,-\, \partial_\nu\,A_\mu\,.$$

Obtenha o limite não-relativístico e determine a razão giromagnética para este caso. Verifique que para $k = 0$ é recuperada a equação de Pauli. Para $k \neq 0$ o termo adicional é conhecido como interação devida ao momento anômalo e dá origem à razão giromagnética

$$g \;=\; 2\,(1\,+\,k)\,,$$

que pode ser ajustada para fornecer o resultado experimental $g \approx 2.0023$.

8. Verifique as relações (3.11), no terceiro capítulo do Bjorken & Drell.

9. Demonstre as relações (1.27), no primeiro capítulo do Bjorken & Drell.

10. Verifique que $\Gamma^T_{\mu\nu}$ [definido na Eq. (2.34) do segundo capítulo do Bjorken & Drell] satisfaz
$$(\Gamma^T_{\mu\nu})^2 \;=\; \pm 1\ .$$

11. Considere duas representações para as matrizes γ relacionadas por
$$R\,\gamma^\mu\,R^{-1} \;=\; \tilde{\gamma}^\mu\,.$$
Como se transforma o operador de reversão temporal T [definido na Eq. (5.15) do Bjorken & Drell] de uma representação para a outra?

12. Calcule o propagador livre não-relativístico no espaço real completando a integral na Eq. (6.26) do Bjorken & Drell.

13. Calcule a função de Green retardada para a equação de difusão, dada por
$$\nabla'^2 G \,-\, a^2\,\frac{\partial G}{\partial t'} \;=\; -\delta^4(x' \,-\, x)\ .$$

14. Exercício 1. do sexto capítulo do Bjorken & Drell.

15. Considere o oscilador harmônico clássico
$$\frac{d^2x}{dt^2} \;=\; -\omega_0^2\,x\ .$$
A equação acima pode ser escrita como
$$\frac{dX}{dt} \;=\; A\,X\ ,$$

onde

$$X \;\equiv\; \begin{pmatrix} x \\ dx/dt \end{pmatrix}$$

e

$$A \;\equiv\; H_0 \,+\, V \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,+\, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \;.$$

Nesta teoria o propagador livre é dado por

$$P(t) \;=\; \theta(t) \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;.$$

Calcule o propagador completo

$$F(t, t_0) \;=\; F(t, t_0; 0) \,+\, F(t, t_0; 1) \,+\, \ldots$$

onde

$$\begin{aligned} F(t, t_0; 0) \;&=\; P(t - t_0) \\ F(t, t_0; 1) \;&=\; \int_{t_0}^{t} P(t - t_1)\, V\, P(t_1 - t_0)\, dt_1 \\ \mathit{etc.} \end{aligned}$$

Note que $X(t) \;=\; F(t, t_0)\, X(t_0)$.