FFI 201 – Física Computacional I

Sexto Projeto (prazo até 4/11/12)

Instruções

- Crie um diretório "PROJ6_#usp" em /home/public/FISCOMP12/PROJ6
- Proteja seu diretório para nao ser lido por "g" e "o"
- Deixe no diretório os arquivos abaixo:
  - "**exerA1.f**", "**exerA2.f**" e "**grafA.ps**"
  - "**exerB1.f**", "**exerB2.f**", "**grafB.ps**" e "**exerB.txt**"
  - "**grafC.ps**"
  - "**grafD.ps**" e "**exerD.txt**"
  - "**grafE.ps**"
- Os códigos devem seguir **rigorosamente** os padrões especificados abaixo para entrada/saida
- Use precisão dupla em seus resultados
- Use $g = 9.8$ m/s^2

Tarefa A

Consideremos o pêndulo da figura abaixo, onde uma massa m é suspensa por uma haste de comprimento l e massa desprezível. Indicamos com θ o ângulo em relação à vertical. A equação de Newton para a componente tangencial do movimento é

$$m\,a_\theta = m\,l\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\,m\,g\,\sin\theta$$

e consequentemente temos a equação direfencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta\,.$$

Caso as oscilações sejam pequenas, usamos $\sin\theta \approx \theta$ e obtemos a aproximação harmônica do problema

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,\theta\,,$$

cuja solução é dada por

$$\theta \,=\, \theta_0\,\sin\left(\omega_0\,t \,+\, \phi\right), \qquad\qquad \omega_0 \,=\, \sqrt{\frac{g}{l}}\,,$$

sendo θ_0 e ϕ constantes que fixam o movimento.

Escreva um código que resolva numericamente o pêndulo dentro da aproximação harmônica. Uma possível discretização das equações acima é (método de Euler)

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{l}\,\theta \quad\rightarrow\quad \omega_{i+1} \,=\, \omega_i \,-\, \frac{g}{l}\,\theta_i\,\Delta t \\
\frac{d\theta}{dt} &= \omega \quad\rightarrow\quad \theta_{i+1} \,=\, \theta_i \,+\, \omega_i\,\Delta t\,,
\end{aligned}$$

onde $t \,=\, i\,\Delta t$. Faça sempre $-\pi \leq \theta \leq \pi$, isto é, quando θ ultrapassar π faça $\theta \rightarrow \theta - 2\pi$ ou, se θ ficar menor que $-\pi$, faça $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$. Neste programa calcule também $E(t)$, sendo E a energia total do sistema.

O que ocorre? a energia não é conservada?

Experimente melhorar a precisão da integração introduzindo um esquema de discretização mais adequado. Considere uma ligeira modificação no método de Euler, dada pelas equações de Euler-Cromer

$$\begin{aligned}
\omega_{i+1} &= \omega_i \,-\, \frac{g}{l}\,\theta_i\,\Delta t \\
\theta_{i+1} &= \theta_i \,+\, \omega_{i+1}\,\Delta t\,.
\end{aligned}$$

Escreva um programa com essas novas equações e verifique graficamente se a energia é conservada.

Em seus programas leia (cada um em uma linha) a partir do terminal:

- a massa m
- o comprimento da haste l
- Δt
- o ângulo θ_0
- o tempo T_{sim} de simulação

Use $\omega_0 = 0$ rad/seg. No código "**exerA1.f**" use o método de Euler e no código "**exerA2.f**" o método de Euler-Cromer. A saida, nos arquivos "**exerA1_out.dat**" e "**exerA2_out.dat**", deve ser no formato:

```
t   theta(t)
```

Além disso, voce deve preparar o arquivo "**grafA.ps**" com dois gráficos:

- o primeiro com a solução exata para $\theta(t)$, comparando-a com a solução numérica pelo método de Euler (código "**exerA1.f**") e com o método de Euler-Cromer (código "**exerA2.f**");
- o segundo com a energia total (cinética mais potencial) como função do tempo, para o caso 1 (método de Euler) e para o caso 2 (método de Euler-Cromer).

Para esses gráficos use $m = 1$ kg, $l = 1$ m, $\Delta t = 0.04$ s e $\theta_0 = 10$ graus. (Converta o ângulo para radianos em seu programa!) Acompanhe o movimento por 10 s, começando do máximo deslocamento ($\theta = \theta_0$) e com velocidade zero.

Tarefa B

Consideremos agora o pêndulo com oscilações de ângulo θ arbitrário e que esteja sujeto a efeitos dissipativos e sob a ação de forças externas oscilatórias. Neste caso teremos

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{l}\sin(\theta) - \gamma\frac{d\theta}{dt} + F_o \sin(\Omega t)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

sendo γ o termo que dá a escala resistiva, F_o a amplitude da força externa e Ω a frequência de oscilação da força externa. Note que a massa m foi englobada nas grandezas γ e F_o. A partir desta tarefa, considere $l = 9.8m$.

Adapte o programa realizado na Tarefa A para o caso acima, usando o método de Euler-Cromer. O código deve ler (cada um em uma linha) a partir do terminal:

- o comprimento da haste l
- Δt
- o ângulo θ_0 (em graus)
- o tempo T_{sim} de simulação
- o parâmetro γ
- a amplitude F_o
- a frequência Ω

No código "**exerB1.f**" considere o caso $\gamma = 0$ e $F_o = 0$ e calcule o período T do movimento. A saida, com T em segundos, deve ser dada no terminal. O valor numérico deve ser a última palavra da linha.

Elabore agora o código "**exerB2.f**" para cálculo da integral elíptica

$$T = \sqrt{\frac{2\,l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

que forneça a solução exata. Seu código deve ler (um em cada linha) a partir do terminal:

- o comprimento da haste l
- o ângulo θ_0
- o incremento h para cálculo da quadratura (usando e.g. um de seus códigos do Projeto 3; tome cuidado com a singularidade em $\theta = \pm\theta_0$).

O resultado para o período T deve aparecer no terminal, no mesmo formato acima.

Produza agora o arquivo "**grafB.ps**" com os quatro gráficos:

- gráfico de θ (rad) em função de t (s) para $F_o = 0$ e $\gamma = 2$; no título de seu gráfico deve ser respondida a seguinte pergunta: o amortecimento é crítico, subcrítico ou supercrítico? (visite o livro do Moysés Nussensveig)
- gráfico conjunto de $\theta(t)$ e $\omega(t)$ para os casos $F_o = 0$, $F_o = 0.5$ e $F_o = 1.2$ (um gráfico para cada caso); use $\gamma = 1/2$, $\Omega = 2/3$ e $\Delta t = 0.03$; discuta os três casos no arquivo de texto "**exerB.txt**".

NOTE: o tempo de simulação deve ser escolhido convenientemente.

Tarefa C

Na tarefa anterior você se deparou com o fato do pêndulo poder exibir tanto um movimento previsível (periódico) como não-previsível (não-periódico). O segundo caso é um exemplo típico de um movimento caótico. Para se quantificar o movimento caótico (ou não) devemos observar a sensitividade às condições iniciais do sistema. O sistema será previsível (não-caótico) caso duas condições iniciais próximas produzam movimentos que se assemelham exponencialmente no tempo. Em contrapartida, o sistema será caótico quando as trajetórias se afastarem exponencialmente.

Para verificar a existência ou não do regime caótico, vamos considerar (como na Tarefa B) $\gamma = 1/2$, $\Omega = 2/3$, $\Delta t = 0.03$, $F_o = 0.5$ e $F_o = 1.2$. Adapte o código "**exerB1.f**" criando o código "**exerC.f**" com saida no arquivo "**exerC_out.dat**", contendo em cada linha

```
t   Delta_theta(t)
```

onde

$$\Delta\theta(t) \;=\; \theta^{(2)}(t) \;-\; \theta^{(1)}(t)$$

é a diferença entre duas trajetorias $\theta^{(1)}(t)$ e $\theta^{(2)}(t)$ com condições iniciais ligeiramente diferentes. (Por exemplo, podem ser imaginados dois pêndulos independentes com condições iniciais respectivamente $\theta_0^{(1)}$ e $\theta_0^{(2)}$.) Tome

$$\Delta\theta(0) \;=\; \theta_0^{(2)} - \theta_0^{(1)} \;=\; 0.001 \;\text{ radianos}\,.$$

Produza o gráfico para $\Delta\theta(t)$, colocando a saida no arquivo "**grafC.ps**". Considere o movimento de dois pêndulos soltos com velocidade nula. O arquivo deve ter 2 páginas (dois gráficos), um para o caso $F_o = 0.5$ e o outro para o caso $F_o = 1.2$. Repare que no primeiro caso as trajetórias se aproximam exponencialmente (não-caótico), enquanto no segundo caso as mesmas se afastam exponencialmente (caótico), ou seja

$$\Delta\theta(t) \;\approx\; \exp\left(\lambda\, t\right),$$

onde $\lambda < 0$ indica movimento não-caótico e $\lambda > 0$ indica movimento caótico. Faça os gráficos de $\Delta\theta(t)$ vs. t com escala semi-logarítmica e estime o parâmetro λ, chamado de **expoente de Liapunov**. O valor de λ deve aparecer no título do gráfico.

Tarefa D

Na realidade o movimento caótico não é tão imprevisível quanto nos parece à primeira vista. De fato ele possui certas estruturas que podem ser visualizadas traçando o gráfico $\omega(\theta)$.

Faça os gráficos $\omega(\theta)$ para os casos $F_o = 0.5$ e $F_o = 1.2$ (arquivo "**grafD.ps**" de 2 páginas), colocando a explicação da comparação dos dois casos no arquivo "**exerD.txt**".

Tarefa E

Conforme você deve ter observado, no caso caótico existem regiões do diagrama que nunca foram visitadas. Uma maneira mais efetiva de se visualizar a "estrutura" existente no movimento caótico é a realização de um **secção de Poincaré**. Isto é, graficamos $\omega(\theta)$ somente quando $\Omega\, t = 2\, n\, \pi$, com n inteiro.

Faça o gráfico de $\omega(\theta)$ na secção de Poincaré, que no nosso caso deve ser traduzida numericamente por $|t - 2n\pi/\Omega| < \Delta t/2$. O gráfico (no arquivo "**grafE.ps**" de 2 páginas) deve ser feito para os casos $F_o = 0.5$ e $F_o = 1.2$. Varie ligeiramente as condições iniciasis e verifique que a figura fica inalterada, o que mostra a "universalidade" do seu caos. Na realidade a figura que você obteve não é contínua e define um fractal. O estudo de fractais e caos está de fato intimamente ligado. A figura do caos obtida é chamada de "atrator estranho". Repare que no caso não-caótico o atrator estranho é um ponto.