FFI 201 – Física Computacional I

Oitavo Projeto (prazo até 9/12/2012)

Instruções

- Crie um diretório "PROJ8_#usp" em /home/public/FISCOMP12/PROJ8
- Proteja seu diretório para não ser lido por "g" e "o"
- Deixe no diretório os arquivos abaixo:
  - "**exerA.f**", "**tabA1_out.dat**", "**grafA.ps**"
- Os códigos devem seguir rigorosamente os padrões especificados abaixo para entrada/saida
- Use precisão dupla em seus resultados

Consideraremos neste projeto o efeito da atração gravitacional entre os Planetas e o Sol. De acordo com a lei da gravitação de Newton, a força de atração gravitacional entre um Planeta (de massa M_P) e o Sol (de massa M_S) é dada por:

$$\vec{F}_G \; = \; -G \, \frac{M_S \, M_P}{r^3} \, \vec{r} \, , \tag{1}$$

sendo G a constante gravitacional de dimensão $[G] = [L^3 T^{-2} M^{-1}]$ e $\vec{r}$ o vetor distância entre o Sol e o Planeta. Como os raios médios das translações dos Planetas, bem como seus períodos, são números grandes no sistema MKS, é conveniente usarmos unidades astronômicas de espaço e de tempo. A unidade de espaço é o UA (unidade astronômica, 1 UA $\approx 1.5\,10^{11} m$), correspondendo à distância média Terra-Sol, e a unidade de tempo é o ano (1 ano $\approx 3.2\,10^7 s$), período de translação da Terra. A unidade de massa correspondente pode ser obtida aproximando-se a órbita terrestre como circular:

$$\frac{M_T \, v^2}{r} \; = \; \text{força centrípeta} \; = \; \text{força gravitacional} \; = \; \frac{G M_S M_T}{r^2} \, . \tag{2}$$

Assim, obtemos

$$GM_S \;=\; v^2\, r \;=\; \left(\frac{2\pi r}{ano}\right)^2 r \;=\; 4\pi^2 \frac{(UA)^3}{ano^2}\,, \tag{3}$$

ou seja $GM_S \;=\; 4\pi^2$ nas unidades astronômicas.

Vamos considerar inicialmente o problema de dois corpos (Sol+Planeta). Neste caso a conservação de momento angular (válida para forças centrais) implica um movimento planar. Consideremos o Sol parado na origem $(x_S, y_S) \;=\; (0, 0)$. A equação de movimento para o planeta — com coordenadas (x, y) — será

$$\frac{d^2x}{dt^2} \;=\; \frac{F_G, x}{M_P} \;=\; -G\,\frac{M_S\, x}{r^3} \tag{4}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \;=\; \frac{F_G, y}{M_P} \;=\; -G\,\frac{M_S\, y}{r^3}\,, \tag{5}$$

sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

No presente projeto vamos usar, ao invés do método de Euler-Cromer, o método de Verlet, que se baseia na expansão de Taylor

$$y(t_i \pm \Delta t) \;=\; y(t_i) \pm \frac{dy}{dt_i}\Delta t \;+\; \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt_i^2}\,(\Delta t)^2 \;\pm\; \frac{1}{6}\frac{d^3y}{dt_i^3}\,(\Delta t)^3 \;+\; \ldots \tag{6}$$

Somando-se as expressões com os dois sinais obtemos

$$y_{i+1} \;=\; 2y_i - y_{i-1} \;+\; \frac{d^2y}{dt_i^2}\,(\Delta t)^2 \;+\; \mathcal{O}((\Delta t)^4)\,, \tag{7}$$

que é uma ordem mais precisa do que o método de Euler que usamos até aqui. Contudo, para calcular y_2 precisamos de y_1 e de y_0. Isso é "consertado" usando-se, por exemplo, na primeira iteração o método de Euler $y_1 = y_0 + v_0\Delta t$, onde y_0 e v_0 são a posição e a velocidade iniciais (dadas). (Ver mais detalhes no Capítulo 4 e no Apêndice A do livro *Computational Physics* de N.J.Giordano e H.Nakanishi.)

TAREFA A: Implemente o método acima para calcular o movimento de um Planeta ao redor do Sol, usando unidades astronômicas.

Em seu programa "**exerA.f**" leia (cada um em uma linha) a partir do terminal:

- r (em UA), i.e. a distância do Planeta à origem, equivalente, no caso circular, ao raio da órbita do Planeta

Tabela 1: A massa do Sol é $\approx 2.0\ 10^{30}$ kg.

Planeta	massa (kg)	raio (UA)	excentricidade
Mercúrio	$2.4\ 10^{23}$	0.39	0.206
Venus	$4.9\ 10^{24}$	0.72	0.007
Terra	$6.0\ 10^{24}$	1.00	0.017
Marte	$6.6\ 10^{23}$	1.52	0.093
Júpiter	$1.9\ 10^{27}$	5.20	0.048
Saturno	$5.7\ 10^{26}$	9.24	0.056
Urano	$8.8\ 10^{25}$	19.19	0.046
Netuno	$1.03\ 10^{26}$	30.06	0.010

- v_0,velocidade inicial
- Δt, intervalo de tempo usado para a integração das equações do movimento

Use $x(0) = r, y(0) = 0, v_x(0) = 0$ e $v_y(0) = v_0$. A saida do programa é dada por:

1. arquivo "**trajA1_out.dat**" contendo em cada linha

$$t \quad x(t) \quad y(t)$$

   para um período completo do movimento (circular ou elíptico);

2. comente sobre a escolha do valor de Δt para obter órbitas estáveis; este resultado deve ser dado no terminal.

Elabore também os seguintes arquivos:

- "**tabA1_out.dat**", contendo uma tabela, com valores de T^2/R^3 para os Planetas, onde T e R são os períodos e raios das respectivas órbitas, usando os dados fornecidos na tabela acima (para o caso de órbita circular). Sua tabela deve conter 3 colunas, i.e. nome do Planeta, velocidade inicial v_0 e razão T^2/R^3. A primeira linha da tabela pode ser para os títulos das colunas.

- "**grafA.ps**", contendo os gráficos da trajetória no plano $x - y$, i.e. pontos $x(t), y(t)$ para os quatro quartos do período, de forma a ilustrar a lei das áreas (portanto são 4 gráficos em sequência). Neste caso use uma órbita elíptica.

TAREFA B: Podemos agora generalizar o programa anterior para incluir todos os Planetas. Para facilitar, colocaremos os Planetas em um único plano. Diferentemente do problema de dois corpos, a órbita de cada Planeta não será mais exatamente periódica. Para testar esta afirmação consideraremos o problema de 3 corpos em que temos Terra (M_T), Sol (M_S) e Júpiter (M_J). Neste caso as equações de movimento para a Terra (x_T, y_T) são

$$\frac{d^2 x_T}{dt^2} = -G\,\frac{M_S\,x_T}{r_{T-S}^3} - G\,\frac{M_J\,(x_T - x_J)}{r_{T-J}^3} \tag{8}$$

$$\frac{d^2 y_T}{dt^2} = -G\,\frac{M_S\,y_T}{r_{T-S}^3} - G\,\frac{M_J\,(y_T - y_J)}{r_{T-J}^3}\,, \tag{9}$$

onde $r_{T-S} = \sqrt{(x_T - x_S)^2 + (y_T - y_S)^2}$ e $r_{T-J} = \sqrt{(x_T - x_J)^2 + (y_T - y_J)^2}$. As equações para Júpiter (x_J, y_J) são análogas.

Apenas para <u>crédito adicional</u>: faça como desafio (com formato livre, deixe os arquivos na pasta, identificandoos com a letra "B" em algum lugar do nome) o cálculo da órbita da Terra colocando Júpiter na posição e velocidade que teria caso sua órbita fosse circular (no problema de dois corpos). Mostre que agora a órbita terrestre não é mais periódica. Multiplique a massa de Júpiter por 100 e 1000 e veja os efeitos mais acentuados.