7600017 – Introdução à Física Computacional

Terceiro Projeto (prazo até 04/05/18)

Instruções

- Crie um diretório "PROJ3_#usp" em /home/public/FISCOMP18/PROJ3
- Proteja seu diretório para nao ser lido por "g" e "o"
- Deixe no diretório apenas os arquivos "**exerIA.f**", "**exerIB.f**" e "**exerIB.pdf**" (**parte I**) e "**exerIIA1.f**", "**exerIIA2.f**" e "**grafIIA.pdf**" (**parte II**).
- Os códigos devem seguir rigorosamente os padrões especificados abaixo para entrada/saida
- Use precisão dupla em seus resultados
- Note: se deixar de fazer algum exercício não inclua o arquivo correspondente

PARTE I

Vamos realizar o cálculo da velocidade de uma bicicleta em função do tempo, levando em conta os efeitos resistivos (hidrodinâmicos) do ar.

A) Ignoremos inicialmente o efeito resistivo do ar e a segunda lei de Newton nos dá

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}, \tag{1}$$

sendo m a massa do sistema ciclista+bicicleta e F é a força que a ciclista emprega (devido à sua energia interna) para o movimento. Supomos aqui que não haja atritos nas engrenagens da bicicleta de forma que praticamente toda a força empregada pela ciclista é transmitida ao movimento do sistema ciclista+bicicleta. A questão é: como calcular-se F? Podemos, ao invés de (1), tratar o problema de outra forma. Estudos fisiológicos de ciclistas corredores mostraram que a potência P fornecida pelos ciclistas é de aproximadamente 400 Watts para corridas de duração da ordem de uma hora. Então temos

$$\frac{dE}{dt} = P \tag{2}$$

e

$$mv\frac{dv}{dt} = P \tag{3}$$

o que implica

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P}{mv} \; . \tag{4}$$

De novo, desprezamos o atrito devido às engrenagens da bicicleta e o atrito da roda com o solo. Resolvendo-se a equação (4) temos

$$v(t) = \sqrt{v_0^2 + 2Pt/m} \; . \tag{5}$$

Discretizando a equação (4) acima usando a relação para a derivada de dois pontos para frente, i.e.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} \qquad \text{com} \quad t_i = i\,\Delta t \quad \text{e} \quad i = 0, 1, 2, \ldots \; , \tag{6}$$

temos a relação

$$v_{i+1} = v_i + \frac{P}{mv_i}\Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \; , \tag{7}$$

conhecida como **método de Euler**.

Escreva um código que calcule, usando a equação (7), a velocidade como função do tempo. Use $m = 70Kg$ para a massa do sistema ciclista+bicicleta e P = 400 Watts.

Leia a partir do terminal (cada um em uma linha) v_0 (pequeno, mas diferente de zero) em m/s, Δt (em segundos) e o intervalo de tempo T (em s). A saida do programa deve ser o arquivo "vel1_out.dat", com a velocidade em função do tempo para um intervalo de tempo T, no formato

```
t      v(t)
```

A primeira linha do arquivo deve ser

```
0      v0
```

e o número de linhas do arquivo será 1+int(T/Δt).

B) Vamos agora considerar o efeito da resistência do ar. Em geral esperamos que a força resistiva obedeça à seguinte realação

$$f_{res} \sim \gamma_1 v - \gamma_2 v^2 \; , \tag{8}$$

onde o primeiro termo domina para pequenas velocidades e o segundo para grandes velocidades. No presente caso o primeiro termo, que pode ser estimado pela lei de

Stokes para o escoamento hidrodinâmico de simples objetos, pose ser desprezado frente ao segundo termo. O coeficiente γ_2 pode ser estimado levando-se em conta que no intervalo dt a massa de ar que se choca com a ciclista é dada por

$$m_{ar} \approx \rho\, A\, v\, dt \;, \tag{9}$$

sendo A a área de choque e ρ a densidade do ar. Se esta massa de ar, ao se chocar com a ciclista, adquire a mesma velocidade v da bicicleta, temos que a energia dada ao ar é

$$E_{ar} \approx m_{ar} v^2/2 \;. \tag{10}$$

Esta energia é transferida pela força resistiva

$$F_{res}\, v\, dt = W_{res} = E_{ar} \tag{11}$$

e temos que

$$F_{res} = C\, \rho\, A\, v^2 \;, \tag{12}$$

onde C é o coeficiente de arrastamento ("drag coefficient"). No presente cálculo $C = 1/2$, o que representa uma boa aproximação. Se inserirmos a equação (12) em (7) teremos a equação

$$v_{i+1} = v_i + \frac{P}{m v_i}\Delta t - \frac{C\, \rho\, A\, v_i^2}{m}\Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \;. \tag{13}$$

Generalize o programa da tarefa **A)** levando em conta o efeito da resistência do ar. Ler a partir do terminal (cada um em uma linha) v_0, Δt, T e a área A. **Obs:** use $m = 70Kg$, $P = 400$ Watts e $\rho = 1.2Kg/m^3$; também, note que suas respostas devem ser referentes a um intervalo T, isto é, qual a velocidade da ciclista apos um tempo T (lido), etc. Teste seu programa para tempo T igual a 3 horas. A saida de seu programa, direto para o terminal, deve ter o seguinte formato:

– resposta à primeira questão abaixo, com o número de linhas que for necessário.

– respostas às próximas 4 questões, uma por linha (sem linhas adicionais entre as respostas); a resposta numérica deve ser a última palavra da linha.

Questões:

1. Por que ciclistas corredores normalmente se curvam em corridas? por que os ciclistas correm em grupo? por que é mais vantajoso um corredor colar-se atrás de outro ao invés de ultrapassá-lo diretamente?

2. Qual a velocidade final da ciclista após o tempo T?

3. Em que instante é alcançada a velocidade terminal?
4. Qual o espaço total percorrido pela ciclista após o tempo T?
5. Qual a velocidade média da ciclista no período de tempo T?

Além disso, voce deve preparar um gráfico com a comparação de seus resultados para diversos valores da área A. Use $v_0 = 0.1m/s$ e tempo de 30 minutos. Use $\Delta t = 0.1s$. Seu gráfico deve conter:

- curva da solução exata sem resistência do ar
- curvas para 3 valores diferentes da área A: 1/3, 1, 3.

O gráfico deve ser preparado com `gnuplot` e salvo como arquivo "exerIB.pdf".

PARTE II

O método de Euler que utilizamos acima é simples e muito útil. Ele pode ser usado, por exemplo, para calcular a trajetória de um projétil (em três dimensões) lançado com uma dada velocidade inicial, como uma bola de futebol, considerando-se inclusive o efeito da resistência do ar sobre uma bola em rotação (efeito Magnus). Entretanto, em alguns casos, o método pode não ser apropriado. Vamos estudar isso, no caso do moviemtno de um pêndulo.

Tarefa A

Consideremos o pêndulo da figura abaixo, onde uma massa m é suspensa por uma haste de comprimento l e massa desprezível. Indicamos com θ o ângulo em relação à vertical. A equação de Newton para a componente tangencial do movimento é

$$m\, a_\theta \;=\; m\, l\, \frac{d^2\theta}{dt^2} \;=\; -\, m\, g\, \sin\theta$$

e consequentemente temos a equação direfencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \;=\; -\frac{g}{l}\sin\theta\,.$$

Caso as oscilações sejam pequenas, usamos $\sin\theta \approx \theta$ e obtemos a aproximação harmônica do problema

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \;=\; -\frac{g}{l}\,\theta\,,$$

cuja solução é dada por

$$\theta \;=\; \theta_0\, \sin\left(\omega_0\, t \,+\, \phi\right), \qquad\qquad \omega_0 \;=\; \sqrt{\frac{g}{l}}\,,$$

sendo θ_0 e ϕ constantes que fixam o movimento.

Escreva um código que resolva numericamente o pêndulo dentro da aproximação harmônica. Uma possível discretização das equações acima é (método de Euler)

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{l}\,\theta \quad \rightarrow \quad \omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l}\,\theta_i\,\Delta t \\
\frac{d\theta}{dt} &= \omega \quad \rightarrow \quad \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i\,\Delta t\,,
\end{aligned}$$

onde $t = i\,\Delta t$. Faça sempre $-\pi \leq \theta \leq \pi$, isto é, quando θ ultrapassar π faça $\theta \rightarrow \theta - 2\pi$ ou, se θ ficar menore que $-\pi$, faça $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$. Neste programa calcule também $E(t)$, sendo E a energia total do sistema. Você notará que a solução está incorreta e que a energia total não é constante. Isto nos diz que a discretização escolhida não é adequada.

Uma ligeira modificação no método de Euler consertará este problema. Para isso é suficiente considerar as equações (de Euler-Cromer)

$$\begin{aligned}
\omega_{i+1} &= \omega_i - \frac{g}{l}\,\theta_i\,\Delta t \\
\theta_{i+1} &= \theta_i + \omega_{i+1}\,\Delta t\,.
\end{aligned}$$

Escreva um programa com estas novas equações e mostre graficamente a ausência dos problemas antes apontados.

Em seus programas leia (cada um em uma linha) a partir do terminal:

- a massa m
- o comprimento da haste l
- Δt
- o ângulo θ_0 em graus (mas: leia o comentario abaixo)
- o tempo T_{sim} de simulação

Use $\omega_0 = 0$ rad/seg e $g = 9.8$ m/s^2. No código "**exerIIA1.f**" use o metodo de Euler e no código "**exerIIA2.f**" o metodo de Euler-Cromer. A saida, nos arquivos "**exerIIA1_out.dat**" e "**exerIIA2_out.dat**", deve ser no formato:

```
t   theta(t)
```

Além disso, voce deve preparar o arquivo "**grafIIA.pdf**" com dois gráficos (i.e. um arquivo com duas páginas):

- o primeiro com a solução exata para $\theta(t)$, comparando-a com a solução numérica pelo metodo de Euler (código "**exerIIA1.f**") e com o metodo de Euler-Cromer (código "**exerIIA2.f**");

- o segundo com a energia total (cinética mais potencial) como função do tempo, para o caso 1 (metodo de Euler) e para o caso 2 (metodo de Euler-Cromer).

Para esses gráficos use $m = 1$ kg, $l = 1$ m, $\Delta t = 0.04$ s e $\theta_0 = 10$ graus. (Converta o ângulo para radianos em seu programa!) Acompanhe o movimento por 10 s, começando do máximo deslocamento ($\theta = \theta_0$) e com velocidade zero.