7600017 – Introdução à Física Computacional

Sexto Projeto (prazo até 26/06/18)

Instruções

- Crie um diretório "PROJ6_#usp" em /home/public/FISCOMP18/PROJ6
- Proteja seu diretório para não ser lido por "g" e "o"
- Deixe no diretório os arquivos abaixo:
  - "**exerA.f**"
  - "**proj6.tex**", "**proj6.pdf**"
- Os códigos devem seguir rigorosamente os padrões especificados abaixo para entrada/saida
- Use precisão dupla em seus resultados

Anãs brancas são estrelas cuja massa não é suficiente para gerar em seu centro as altas temperaturas necessárias para continuar os processos de fusão nuclear característicos de estrelas ativas, como o Sol. Para essas estrelas, o centro não é mais uma fonte de energia. Portanto, a estrela irradia gradualmente sua energia e se resfria, enquanto que seu centro, não mais protegido do colapso gravitacional pelas reações de fusão, torna-se extremamente denso. Desta forma, a estrela é suportada apenas pela pressão de degenerescência dos elétrons, que não é devida a movimentos das partículas, mas sim a efeitos quânticos. Mais precisamente, a pressão de degenerescência decorre do fato de os elétrons serem férmions (de spin 1/2) e portanto obedecerem ao "princípio de Pauli", que afirma que dois férmions não podem ocupar um mesmo estado quântico. Há uma massa máxima que uma anã branca pode ter, a partir da qual a pressão de degenerescência não é mais capaz de impedir o colapso gravitacional. Esta é a massa de Chandrasekhar.

No presente projeto, vamos resolver numericamente as equações que determinam a densidade e a massa de uma estrela anã branca e estudar alguns aspectos desses objetos. (Mais detalhes podem ser encontrados no livro "Computational Physics", de Koonin e Meredith.)

Equações para o Equilíbrio do Sistema

Supondo que a estrela possua uma distribuição de massa com simetria esférica, temos a seguinte expressão para a força gravitacional sobre um elemento de volume a uma distância r do centro da estrela

$$F_{grav}(r) \;=\; -\frac{Gm(r)}{r^2}\,\rho(r)\,, \tag{1}$$

onde G é a constante gravitacional, $\rho(r)$ é a densidade à distância r e $m(r)$ é a massa da *porção interna* da estrela a esta distância

$$m(r) \;=\; 4\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr'\,. \tag{2}$$

Note que há uma relação diferencial entre a massa $m(r)$ e a densidade $\rho(r)$, dada por

$$\frac{dm(r)}{dr} \;=\; 4\pi\, r^2\, \rho(r)\,. \tag{3}$$

Denotando como $P(r)$ a pressão de degenerescência à distância r, temos que a força sobre o elemento de volume na posição r decorrente da variação de $P(r)$ é dada por $dP(r)/dr$. Portanto, para a situação de equilíbrio, igualando as duas forças, temos

$$\frac{dP(r)}{dr} \;=\; \frac{dP(\rho)}{d\rho}\,\frac{d\rho(r)}{dr} \;=\; -\frac{G\,m(r)}{r^2}\,\rho(r)\,. \tag{4}$$

Podemos agora inverter e obter

$$\frac{d\rho(r)}{dr} \;=\; -\left(\frac{dP(\rho)}{d\rho}\right)^{-1}\,\frac{G\,m(r)}{r^2}\,\rho(r)\,. \tag{5}$$

As Equações (3) e (5) acima são as duas equações diferenciais acopladas que determinam a estrutura da estrela. Partindo da condição $\rho = \rho_c$ e $m = 0$ em $r = 0$ (i.e., ρ_c é a densidade no centro da estrela), podemos integrar as equações do interior para o exterior da estrela, definindo o raio da mesma como o ponto para o qual $\rho(r)$ vai a zero. Chamando esse raio de R, a massa total da estrela será dada por $M = m(R)$. Já que R e M dependem de ρ_c, é possível estudar estrelas de diferentes massas variando-se o parâmetro ρ_c.

A expressão para a pressão $P(r)$ vem do tratamento quântico de um “gás” de elétrons. Pode-se obter desta maneira a seguinte expressão para $dP(\rho)/d\rho$

$$\frac{dP}{d\rho} \;=\; Y_e\,\frac{m_e}{M_p}\;\gamma\left(\frac{3\pi^2\, Y_e}{M_p\, m_e^3}\,\rho\right)\,, \tag{6}$$

onde Y_e é o número de elétrons por *núcleon* para o material que compõe a estrela, m_e e M_p são respectivamente as massas do elétron e do próton, e a função $\gamma(x)$ é dada por

$$\gamma(x) \;=\; \frac{x^{2/3}}{3\sqrt{1\,+\,x^{2/3}}}\,. \tag{7}$$

(Foi desprezada a pequena diferença de massa entre prótons e nêutrons.) Note que Y_e é a razão entre o número de elétrons — que, pela neutralidade da matéria, deve ser igual ao número de prótons — e o número de prótons mais nêutrons. Por exemplo, para o ^{56}Fe temos

$$Y_e \;=\; \frac{26}{56} \;=\; 0.464\,. \tag{8}$$

Para o ^{12}C e também para o ^{4}He temos $Y_e = 0.5$.

Solução Numérica

Queremos integrar as Equações (3) e (5) — com $dP/d\rho$ dado pela Equação (6) acima — para encontrar a densidade e a massa como funções de r, assim como o raio e a massa total da estrela. Primeiramente, é conveniente re-escalar as equações de forma que tenhamos variáveis adimensionais. Vamos definir as novas variáveis $\overline{r}$, $\overline{m}$, $\overline{\rho}$ dadas por

$$\overline{r} \;=\; r/R_0\,, \qquad \overline{m} \;=\; m/M_0\,, \qquad \overline{\rho} \;=\; \rho/\rho_0\,, \tag{9}$$

onde os fatores de escala R_0, M_0, ρ_0 devem ser escolhidos convenientemente. De fato, pode-se verificar que as equações tomam a forma simples

$$\frac{d\,\overline{\rho}}{d\,\overline{r}} \;=\; -\frac{\overline{m}\,\overline{\rho}}{\gamma(\overline{\rho})\,\overline{r}^2} \tag{10}$$

$$\frac{d\overline{m}}{d\,\overline{r}} \;=\; \overline{r}^2\,\overline{\rho}\,. \tag{11}$$

se escolhermos os seguintes valores de escala

$$R_0 \;=\; \frac{Y_e}{M_p\,m_e}\sqrt{\frac{3\pi}{4G}} \;=\; 7.72\times 10^6\;\; Y_e\;\; m \tag{12}$$

$$M_0 \;=\; \frac{{Y_e}^2}{{M_p}^2}\sqrt{\frac{3\pi}{4G^3}} \;=\; 5.67\times 10^{30}\;\; {Y_e}^2\;\; kg \tag{13}$$

$$\rho_0 \;=\; \frac{M_p\,{m_e}^3}{3\pi^2\,Y_e} \;=\; 9.79\times 10^8\;\; {Y_e}^{-1}\;\; kg/m^3\,. \tag{14}$$

Note que os cálculos acima foram realizados (por simplicidade) em unidades em que a velociade da luz e constante de Planck são iguais a um, sendo "traduzidos" para as unidades usuais (do sistema MKS) no final.

Para integrar as equações (10) e (11), com $\gamma(x)$ dado pela Equação (7), vamos utilizar o **método de Runge Kutta** de segunda ordem. Este método é baseado na aproximação da inclinação da função que queremos integrar por seu valor no *centro* do intervalo de integração (ao invés do início do intervalo, como no método de Euler). Para integração da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t) \tag{15}$$

fazemos então

$$k \equiv f(y_i,\, t_i)\,\Delta t \tag{16}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(y_i + k/2,\; t_i + \Delta t/2)\;\Delta t\,, \tag{17}$$

onde $t_i = i\,\Delta t$. O método permite uma precisão da ordem de $(\Delta t)^3$, portanto bem melhor que a precisão de $(\Delta t)^2$ obtida no método de Euler.

Tarefa A

Implemente o método acima para integração das equações (10) e (11).

Em seu programa "**exerA.f**" leia (cada um em uma linha) a partir do terminal:

- $\Delta\overline{r}$
- $\overline{\rho}_c$
- Y_e

A saida do programa é dada por:

1. Dois arquivos: "**rho_out.dat**" e "**massa_out.dat**" contendo respectivamente (em cada linha) os dados: $\overline{r}, \overline{\rho}(\overline{r})$ e $\overline{r}, \overline{m}(\overline{r})$ utilizando grandezas adimensionais, como definido acima.

2. Raio e massa total da estrela (em unidades físicas; a conversão é feita como descrito no projeto, os parámetros podem ser fixos no código). Estes resultados devem ser dados no terminal, em duas linhas, sendo a primeira o raio (valor numérico na última palavra da linha) e a segunda a massa (valor numérico na última palavra da linha).

Programe seu código para fornecer dados até que a densidade seja da ordem de 10^{-4} vezes a densidade central. Como critério para estimar o raio (e massa) total da estrela use o raio tal que a densidade em R seja 10^{-3} vezes a densidade central. Faça gráficos de $\overline{\rho}(\overline{r})$ e de $\overline{m}(\overline{r})$ para vários valores da densidade central adimensional $\overline{\rho}_c$ (no intervalo de 10^{-1} a 10^6). Certifique-se da precisão do resultado escolhendo valores suficientemente pequenos para o incremento $\Delta\overline{r}$.

Nota: utilize como dados iniciais: raio 10^{-9} e massa 0, além da densidade central dada, ρ_c.

Tarefa B

Calcule a partir do programa acima o raio e a massa da estrela em função da densidade central (converta seus resultados para unidades físicas), para o caso com $Y_e = 0.5$. Produza uma tabela com massas e raios para estrelas anãs brancas com densidade central (adimensional) entre 10^{-1} e 10^6 (faça pelo menos 5 valores diferentes). Verifique em cada caso que o $\Delta\overline{r}$ é suficientemente pequeno para fornecer resultados com boa precisão. Sua tabela deve ter quatro colunas: $\overline{\rho}_c$ (adimensional), ρ_c (físico), R_{tot}, M_{tot} e deve ser incluída no arquivo "**proj6.pdf**", descrito abaixo. Usando esses resultados, estime a massa de Chandrasekhar.

Instruções para proj6.pdf: crie um arquivo "**proj6.tex**" Seu arquivo deve conter os gráficos do item A e a tabela do item B. Organize seu documento como um artigo científico (veja o modelo "projeto6.tex" no diretório PROJ6). O texto deve ser dividido em Seções, contendo:

- Título (autor, #USP, etc)
- Data
- Introdução (inclua uma visão geral e curiosidades sobre as estrelas anãs brancas, por exemplo: por que elas são brancas, como foram observadas pela primeira vez, diferenças em relação a outros tipos de estrelas e buracos negros, etc!)
- Descrição do Projeto: principais aspectos do trabalho realizado, equações envolvidas, método usado para a integração numérica, etc.
- Resultados: gráficos e tabela, com descrição detalhada.
- Conclusão: visão final sobre o projeto, discussão do limite de Chandrasekhar e resposta à pergunta *O Sol vai virar uma anã branca?*
- Bibliografia: utilizando as instruções \cite e \bibitem no ambiente "thebibliography".