

## INTERFERÔMETRO DE FABRY-PEROT

O interferômetro de Fabry-Perot é um dos interferômetros mais comumente usado em diferentes aplicações de alta resolução. Consiste de duas placas de vidro paralelas, cobertas nas superfícies internas com uma camada metálica parcialmente transparente. Uma das placas é fixada enquanto a outra está montada sobre um posicionador, similar àquele usado no interferômetro de Michelson. Esta placa pode se deslizar lentamente na direção perpendicular ao plano da placa com um micrômetro calibrado. A placa permanece paralela em menos do que um segundo de arco.

No etalon de Fabry-Perot as duas estão separadas por uma distância fixa.

Consideremos uma camada de ar limitada por dois semi-espelhos planos paralelos. Um feixe de luz incide com um ângulo  $\theta$  sobre as placas e após reflexões múltiplas veremos que vários feixes paralelos de luz saem do conjunto (ver fig. 1).

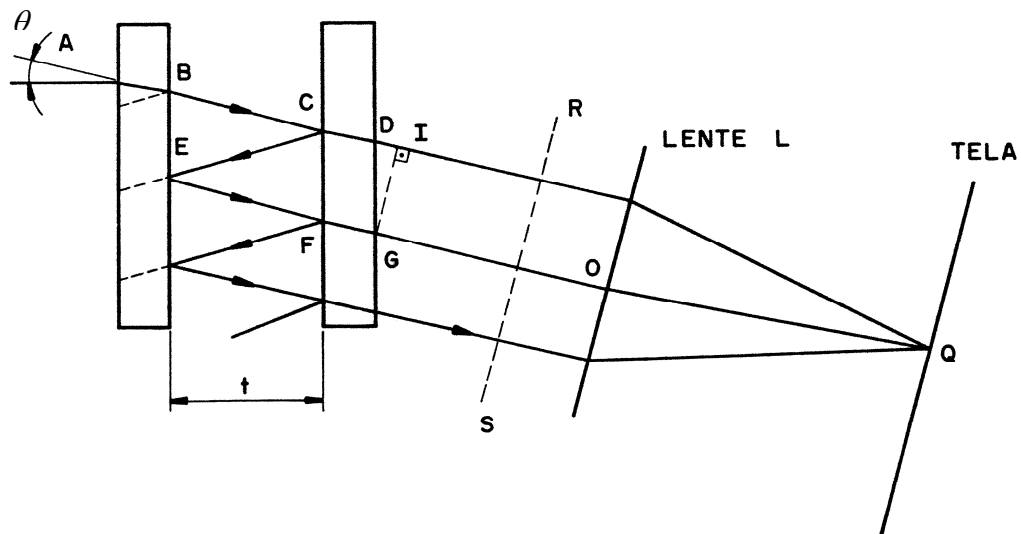


Figura 1:

Os feixes transmitidos são coletados por uma lente  $L$  e levadas a um ponto  $Q$  do plano focal. A lente leva todos os feixes em conjunto a  $Q$  com a diferença de fase que possuíam quando no plano  $RS$  que é normal a  $OQ$ . A diferença de caminho entre duas frentes de ondas de feixes adjacentes, por exemplo:  $ABCDQ$  e  $ABCEFGQ$  é (ver fig. 1).

$$\delta = CE + EF - DI \quad (1)$$

$$\delta = 2t \cos \theta \quad (2)$$

Para ter interferência construtiva temos que todos os feixes devem estar em fase em  $Q$ , isto significa que

$$n\lambda = 2t \cos \theta \quad (3)$$

Se o índice de refração do meio entre as placas é  $\mu \neq 1$  teremos

$$n\lambda = 2 \mu t \cos \theta \quad (4)$$

Como todos os feixes que chegam em  $Q$  correspondem a feixes incidentes com um ângulo  $\theta$ , as franjas podem ser observadas com uma fonte extensa.

A ordem de interferência no centro está definida pelo número  $p$  tal que ( $\cos \theta = 1$  ou  $\theta = 0$ ).

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2\mu t}{\lambda} \quad (5)$$

Se  $p$  é um número inteiro, a  $k$ -ésima franja brilhante corresponderá a uma interferência de ordem  $p-k$ . Possui, então, um raio angular dado por

$$(p-k)\lambda = 2\mu t \cos \theta_k \cong 2\mu t \left(1 - \frac{\theta_k^2}{2}\right)$$
$$\theta_k = \sqrt{\frac{2k}{p}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu t}} \sqrt{k} \quad (6)$$

O raio angular da franja se comporta como a raiz quadrada de um número inteiro sucessivo. No telescópio (ou anteparo), isto corresponde a uma franja com raio:

$$r = f \tan \theta \simeq f \theta = f \sqrt{\frac{\lambda}{\mu t}} \sqrt{k} \quad (7)$$

onde  $f$  é a distância focal da lente.

Assim a diferença entre os quadrados de raios de franjas consecutivas é uma constante, que estará dada por:

$$r_{k+1}^2 - r_k^2 = f^2 \frac{\lambda}{\mu t} \quad (8)$$

### Aparelhagem

- 1 interferômetro de Fabry-Perot
- 1 fonte de luz filtrada (mercúrio, sódio)
- 1 laser de HeNe
- 1 telescópio
- lentes, suportes, anteparo
- 1 jogo de filtros para lâmpada de Hg

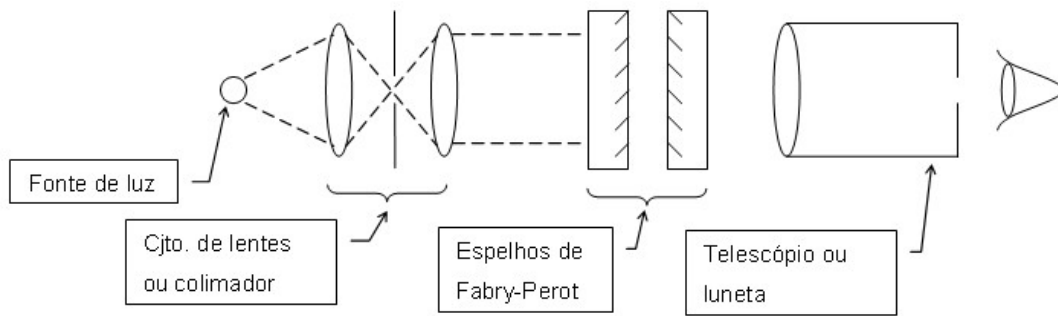


Figura 2:

### Procedimentos

Observe os componentes da montagem do instrumento acompanhando a fig. 2 e ajuste o Fabry-Perot de maneira que a separação entre os espelhos seja da ordem de 1mm. O conjunto de lentes ou colimador mostrado na figura 2 pode ser apenas uma lente convergente, desde que a fonte de luz esteja no foco dela. **Nunca** toque nos espelhos com os dedos: neste ponto os espelhos podem ser colocados num paralelismo exato (analise como pode ser feito isto). Utilize o laser para alinhar os espelhos do interferômetro, incida o laser sobre os espelhos e observe as múltiplas reflexões num anteparo, **não use seus olhos para observação direta na linha do laser!!!** Alternativamente para alinhar podemos usar uma lâmpada espectral, ponha uma máscara preta, a qual deve ter um furo de agulha, entre a lâmpada e o interferômetro. Ligue a lâmpada e observe as reflexões múltiplas nos espelhos. Faça com que as reflexões coincidam ajustando os dois parafusos que regulam o plano de um dos espelhos. Retire a máscara. Deverá se observar franjas circulares. Agora pode ser feito um ajuste fino. Movimente seus olhos para cima e para baixo, e de lado para lado. Observará que as franjas circulares se contraem e se expandem. Ajuste os parafusos até que esse efeito seja minimizado e seja simétrico ao redor do centro.

### Experimento 1

- Obtenção do fator K de proporcionalidade entre o deslocamento do micrômetro (leitura D) e o deslocamento do espelho.

Podem ser realizados por estes dois métodos utilizando o laser:

1.a.- contagem periódica de 100 franjas de forma consecutiva até completar 6 a 7 períodos de 100 franjas. Com as leituras D's do deslocamento do micrômetro e conhecido o comprimento de onda do laser utilizado, aplicam-se as equações 9, 10 e 11 para determinar K, sugerimos fazer um gráfico para determinar K.

1.b.- Com a utilização de um apalpador com melhor precisão que o micrômetro, em que o apalpador é colocado de forma paralela ao deslocamento do espelho, fazemos leituras paralelas entre micrômetro e apalpador e fazemos um gráfico para determinar K.

### Experimento 2

- Medida do comprimento de onda de uma fonte de luz monocromática.

#### a) Fonte de Mercúrio Filtrada

Monte uma fonte de mercúrio de baixa pressão filtrada. Após que o interferômetro tenha sido cuidadosamente alinhado (bom padrão de franjas), tome a leitura do micrômetro que controla o deslocamento de um dos espelhos. Vire o micrômetro para valores de leitura maiores, enquanto observa o padrão das franjas. Verá que vão desaparecendo no centro. Conte ao menos  $m = 100$  franjas de deslocamento e tome uma nova leitura do micrômetro.

Para  $\theta = 0$  teremos a seguinte relação:

1ª leitura:

$$n\lambda = 2t_1 \quad (9)$$

2ª leitura:

$$(n + m\lambda) = 2t_2 \quad (10)$$

por subtração:

$$m\lambda = 2(t_2 - t_1) = K(D_2 - D_1) \quad (11)$$

onde  $D_1$  é a leitura do micrômetro e  $K$  é uma constante de proporcionalidade, dada pelo fabricante do interferômetro, finalmente teremos

$$\lambda = \frac{2K}{m}(D_2 - D_1) \quad (12)$$

Repita as medidas pelo menos 3 vezes e calcule o valor médio de  $\lambda$ . A constante  $K$  de proporcionalidade pode ser determinada facilmente, basta observar a relação de deslocamento entre o próprio micrômetro e o espelho, e.g. meça o deslocamento do micrômetro para o deslocamento de 1mm do espelho. Compare seu resultado com aquele apresentado na literatura.

b) Fonte de laser He-Ne

Repita a mesma experiência com uma fonte de laser He-Ne. Precisarás usar um sistema de lentes para aumentar o diâmetro do feixe. *Não olhe diretamente o feixe de laser, pode danificar seus olhos.* Tente projetar as franjas de interferência numa tela ou sob a parede.

### Experimento 3

#### Medida do espectro do dubleto de Sódio

##### Aparelhagem

- 1 interferômetro de Fabry-Perot
- 1 lâmpada de Sódio com fonte de alimentação
- 1 papel fosco (ou atenuador de luz)

##### Procedimento

O dubleto de Sódio consiste de duas linhas espectrais na região amarela, 5890 e 5896 Å. A linha de 5890 Å é duas vezes mais intensa que a outra linha de 5896 Å.

Monte a lâmpada de luz de sódio de maneira que seja estabelecido um bom padrão de interferência nítido (separação entre os espelhos ~ 1 mm), observe usando a luneta. Com uma boa observação, poderá notar a existência de dois conjuntos de franjas, um forte e outro fraco. Não há problema em não ter podido distinguir franja forte e franja fraca, basta reconhecer que existem dois conjuntos de franjas. Vire o micrômetro do espelho até que a linha mais fraca fique entre duas mais intensas. Tome uma leitura do micrômetro. Vire o micrômetro para valores maiores de leitura até que as franjas mais fracas coincidam com as mais fortes (situação de alto contraste) e novamente separe-as até que a linha mais fraca esteja no meio das fortes (situação de

baixo contraste). Tome a leitura do micrômetro. Com ar no meio entre os espelhos, teremos  $\mu = 1$  e no centro do padrão de interferência  $\cos\theta = 1$ . A equação 2 será:

$$m\lambda = 2t \quad (13)$$

Para nossa primeira leitura, temos:

$$2t_2 = m_1\lambda_1 = \left(m_1 + n + \frac{1}{2}\right)\lambda_2 \quad (14)$$

onde  $\lambda_1 > \lambda_2$ . A ordem do sistema de franja de menor comprimento de onda difere do sistema de maior comprimento de onda por um número ímpar semi-inteiro (ajuste no meio entre duas franjas).

Para a segunda leitura temos:

$$2t_2 = m_2\lambda_1 = \left(m_2 + n + \frac{3}{2}\right)\lambda_2 \quad (15)$$

Por subtração é fácil obter:

$$2(t_2 - t_1) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (16)$$

e como  $\lambda_1 \approx \lambda_2$

$$\lambda_1 - \lambda_2 \approx \frac{\lambda^2}{2(t_2 - t_1)} \quad (17)$$

Lembrando a equação 10,  $(t_2 - t_1) = K(D_2 - D_1)$  teremos finalmente que:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2K(D_2 - D_1)} \quad (18)$$

Repita a experiência pelo menos 2 vezes e calcule o valor médio de  $\lambda$  como também o valor de  $\Delta\lambda$ . Compare seus resultados com aqueles da literatura.

### **Poder de Resolução de um Fabry-Perot**

O poder de resolução de um interferômetro é a medida da habilidade de discriminar dois padrões de interferência que se apresenta num interferograma devido à existência de mais de um comprimento de onda presente na fonte que as origina. Suponhamos para o caso de dois comprimentos de onda, o Critério de Rayleigh é justamente uma formulação matemática que permite obter a separação entre dois padrões, esse critério representa a habilidade visual de observar dois círculos concêntricos do interferograma devido a dois comprimentos de onda. Não entanto existem também outros critérios que permitem relatar essa habilidade visual. No momento optamos por considerar que o poder de resolução está dado por

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \quad (19)$$

Sendo que para o caso de um interferômetro de Fabry-Perot ela é:

$$R = \frac{2.6p_o\sqrt{r}}{1-r} \quad (20)$$

Onde  $p_o = 2t/\lambda$ ,  $t$  é a separação entre os espelhos do interferômetro e  $r$  é o coeficiente de reflexão destes.

### Perguntas

- 1- Justifique a equação 2.
- 2- Idealize uma experiência para fazer uma comparação entre um padrão de comprimento ótico e um mecânico.
- 3- Calcule a intensidade relativa das franjas, tomando em conta que o feixe incidente está dado por  $\xi = a \exp i(\omega t - kx) = ae^{i\phi}$ .
- 4- O que será observado quando um feixe de luz branca paralelo incide sobre o Fabry-Perot e a luz transmitida é vista através de um espectroscópio?
- 5- O que é um filtro de interferência e compare com o Fabry-Perot.
- 6- Conhece algum outro dispositivo com o qual se observe franjas de interferência? Explique.
- 7- Qual é a o poder de resolução ( $\lambda/\Delta\lambda$ ) do interferômetro? Varia com a separação dos espelhos? Varia com a refletividade dos espelhos? Procure entender as equações 19 e 20. Explique.
- 8- Coerência da luz.

### Referências

- 1- A. C. Melissinos – “Experiments in Modern Physics” – Ed. Academic Press (1966), Biblioteca IFSC 539, M 523.
- 2- W. S. Gornall – “The World of Fabry-Perots”- Laser Applications, July 1983.
- 3- I. Juvells, A. Carnicer, J. Ferré-Borrull, E. Martín-Badosa and M. Montes-Usategui – “Understanding the concept of resolving power in the Fabry–Perot interferometer using a digital simulation” - Eur. J. Phys. **27** (2006) 1111–1119.

## ANEXO I ESPECTRO DE ÁTOMO COM 1 ELÉTRON (Na, etc.)

A excitação dos átomos de Na é feita por impacto de elétrons. A diferença de energia produzida pelo retorno dos elétrons de um estado excitado de energia  $E_1$  para o estado original de energia  $E_0$ , é emitida como um fóton, cuja frequência  $\nu$  é dada por:

$$h\nu = E_1 - E_0$$

onde  $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$  Js é a constante de Planck.

Em primeira aproximação e para o elétron externo único, os elétrons da camada interna completa produzem uma “casca” de potencial  $V$  da carga do núcleo. Este potencial depende da posição  $r$ .

$$V(r) = -\frac{e^2 Z_{eff}(r)}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Os níveis de energia são assim similares aos níveis do átomo de hidrogênio com uma redução da degenerência do momento angular.

$$E_{nl} = -\frac{me^4}{8h^2} Z_{nl}^2 \frac{1}{n^2}$$

Uma relação aproximada para  $E_{nl}$  é

$$E_{nl} = -\frac{me^4}{8h^2} \frac{1}{(n - \mu_{nc}^2)}$$

onde  $\mu_{cn}$  é dado para o Na na tabela

$n \backslash \ell$	0	1	2	3	4
3	1.35	0.85	0.01		
4				0.0	
5					0.0

A interação do spin  $\vec{S}$  do elétron com o seu momento orbital dá ainda uma redução da degenerescência do momento angular total

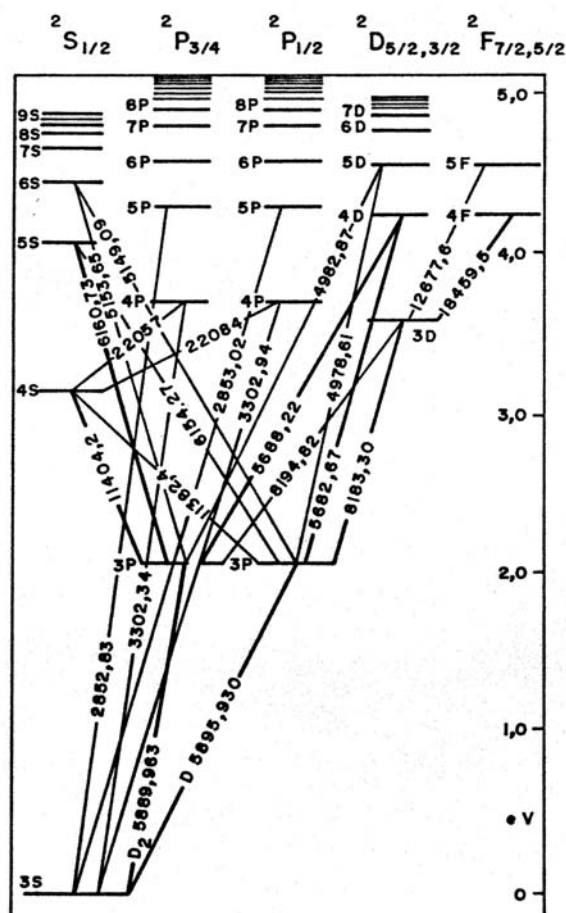
$$j = \left| \ell + \frac{1}{2} \right| \dots \left| \ell - \frac{1}{2} \right|$$

onde  $\ell$  é o momento angular orbital do elétron externo.

Usando a teoria de perturbação com  $H = \zeta(r)\vec{S} \cdot \vec{\ell}$ , obtemos:

$$E_{nlj} = E_{nl} + \xi_{nl} \frac{1}{2} j(j+1) - S(S+1) - \ell(\ell+1)$$

O espectro do Na é o seguinte:



Espectro do Na

**ANEXO II**  
**ESPECTRO ATÔMICO DO SISTEMA COM 2 ELÉTRONS (ex. He, Hg, etc.)**

Excitação de átomos de He e Hg resultam do impacto de elétrons. A diferença de energia produzida quando elétrons voltam do estado excitado  $E_1$  para o estado fundamental  $E_0$ , é emitida como um fóton de energia  $h\nu = E_1 - E_0$ .

O operador Hamiltoniano não relativístico para os dois elétrons 1 e 2 do átomo de Hélio é:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_2 - \frac{2e^2}{|\vec{r}_1|} - \frac{2e^2}{|\vec{r}_2|} + \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$m$  = massa do elétron  
 $e$  = carga do elétron  
 $\Delta_i$  = operador de Laplace  
 $\vec{r}_i$  = posição do elétron

A energia de interação spin órbita  $E_{so} \propto \frac{Z^4}{4(137)^2}$  foi ignorada no caso da carga nuclear  $Z = 2$ , porque é pequena, quando  $Z$  é pequeno.

$\left( \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right)$  é o termo de interação elétron-elétron. Assim, os valores próprios do operador  $H$  sem interação são aqueles do átomo de Hidrogênio.

$$E_{n,m}^0 = -\frac{me^4}{8h^2} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right) \quad n, m = 1, 2, 3 \dots$$

Como a probabilidade de transição para excitação simultânea de 2 elétrons é muito menor que a probabilidade de excitação de 1 elétron, o espectro de energia do sistema sem interação é:

$$E_{1,m}^0 = -\frac{me^4}{8h^2} \left( 1 + \frac{1}{m^2} \right) \quad m = 1, 2$$

O termo de interação levanta a degenerescência do momento angular do espectro de hidrogênio puro e a degenerescência da energia de intercâmbio, resultando num ajuste de energia no qual  $\phi_{n\ell\alpha}^\pm$  são as funções de onda antissimétricas para 2 partículas sem interação com uma componente de posição simétrica  $\phi^+$  ou antissimétrica  $\phi_-$ ,  $\ell$  é o número quântico do momento angular;  $\alpha$  é um conjunto de outros números quânticos.

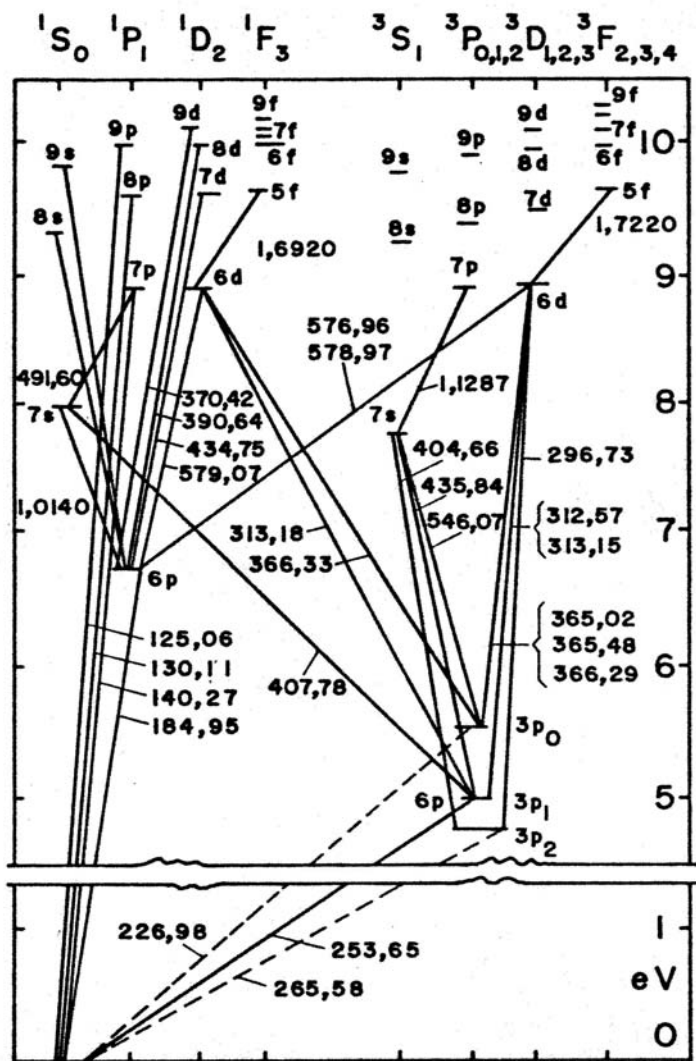
$$E_{n\ell\pm}^1 = \langle \phi_{n\ell\alpha}^\pm | \frac{|e^2|}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} | \phi_{n\ell\alpha}^\pm \rangle = C_{n\ell} \pm A_{n\ell}$$

No presente caso, o momento angular orbital  $\ell$  de um elétron é igual ao momento angular total dos dois elétrons  $L$ , porque consideramos somente a excitação de uma partícula, enquanto o segundo elétron fica no estado fundamental ( $\ell = 0$ ).  $C_{n\ell}$  e  $A_{n\ell}$  são respectivamente a energia de Coulomb e de intercâmbio ( $> 0$ ). O acoplamento do momento angular orbital  $L$  com o spin total  $S$  produz para  $S = 0$ , i.e.,  $\phi^+$ , uma série de estado singleto e para  $S = 1$ , i.e.,  $\phi^-$ , uma série de tripleto. Devido à falta de interação spin-órbita, a separação em energia de um estado

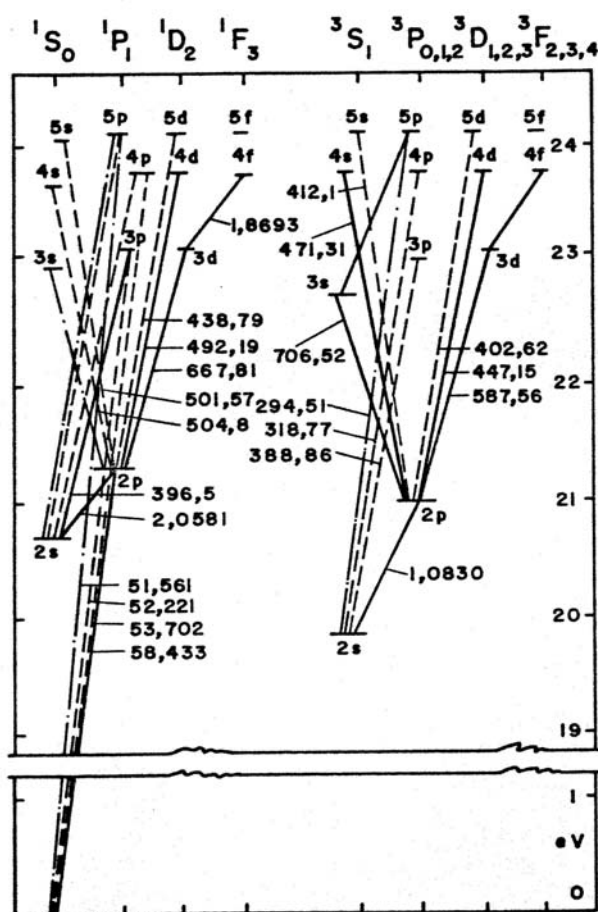


triplete é fraca. Como as funções de onda perturbadas são auto funções de  $S^2$  e como  $S^2$  intercambia com o operador do momento dipolar, a regra de seleção é  $\Delta S = 0$  (característica de sistemas com 2 elétrons e com um número atômico ( $Z$ ) pequeno). As transições entre níveis singleto e tripleto são proibidas.

Independentemente da interação spin-órbita, a regra de seleção para o momento angular total é  $\Delta J = 0, \pm 1$ . Ela se aplica, exceto quando  $J = 0 \rightarrow J' = 0$ . Se a interação spin-órbita é fraca, a regra  $\Delta L = 0, \pm 1$  é válida. Cálculos detalhados permitem descrever os espectros mostrados nas próximas figuras, para He, Hg, etc.



Espectro de Mercúrio



Espectro de Hélio

Ref.: G. Herzberg, Atomic Spectra and Atomic Structure (Dover Publ. 1944); D. R. Bates, Quantum Theory II (Academic Press Inc. 1962).

cor	$\lambda$ (nm)	transição	I relativo
vermelho	706,5	$3^3S \rightarrow 2^1p$	5
vermelho	66,8	$3^1D \rightarrow 2^1p$	6
vermelho	656,0	HeII	4-6
amarelo	587,6	$3^3D \rightarrow 2^3p$	10
verde	504,8	$4^1S \rightarrow 2^1p$	2
verde	492,2	$4^1D \rightarrow 2^1p$	4
azul	471,3	$4^3S \rightarrow 2^3p$	3
azul	447,1	$4^3D \rightarrow 2^3p$	6
azul	438,8	$5^1D \rightarrow 2^1p$	3
violeta	414,4	$6^1D \rightarrow 2^1p$	2
violeta	412,1	$5^3S \rightarrow 2^3p$	3
violeta	402,6	$5^3D \rightarrow 2^3p$	5
violeta	396,5	$4^1p \rightarrow 2^1S$	4
violeta	388,9	$3^3p \rightarrow 2^3S$	10