IFSC-USP / 7600128 - Tópicos Geometria/Topologia - 2020-1 / Prof. Leonardo Maia

**Lista 01 - 2020/02/19 - Entrega: 02/mar**

1. Sejam $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ definida como

$$\begin{cases} e'_1 = & e_3 \\ e'_2 = & e_2 + 2e_3 \\ e'_3 = & e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

duas bases de um espaço vetorial de dimensão 3. Obtenha a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$ e calcule as componentes do vetor $u = e_1 + e_2 + e_3$ em relação à base $\mathcal{B}'$.

2. Considerando a mesma mudança de base do exercício 1, expresse cada membro da nova base dual $\mathcal{B}'^* = \{e'^1, e'^2, e'^3\}$ em termos da base dual $\mathcal{B}^* = \{e^1, e^2, e^3\}$. Quais são as componentes do funcional $\omega = e^1 + e^2 + e^3$ em relação a $\mathcal{B}'^*$?

3. Determine a base dual à base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ com $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 2, 1)$ uma base de $\mathbb{R}^3$.

a. Obtenha as componentes de $u = (2, 3, 5)$ em relação a $\mathcal{B}$.

b. Sendo $\mathcal{B}^* = \{e^1, e^2, e^3\}$ a base de $(\mathbb{R}^3)^*$ dual a $\mathcal{B}$, calcule $e^i(u)$ para $i = 1, 2, 3$, onde $u$ é o vetor do item a.

c. Agora calcule $e^i(v)$ para qualquer $v = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$.

5. Seja $m$ um inteiro positivo. Mostre que a base dual da base $\mathcal{B} = \{x^i\}$, $i = 0, 1, \cdots, m$, do espaço vetorial $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ dos polinômios reais de grau menor ou igual a $m$ é $\mathcal{B}^* = \{\phi_j\}$, $j = 0, 1, \cdots, m$, com $\phi_j(p) \equiv \dfrac{p^{(j)}(0)}{j!}$.

6. Após ler o enunciado do exercício 5, mostre que $\mathcal{B} = \{(x-5)^i\}$, $i = 0, 1, \cdots, m$ é uma base de $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ e determine sua base dual.