Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos
SFI 5704 - Mecânica Estatística A - 2012-2

Prof. Leonardo Paulo Maia

Lista 01 - 2012/08/12 → **2012/08/24**

a. 4.1 a 4.4 de [R]

b. Escolher 20 entre os 34 primeiros exercícios da primeira lista anexada a este documento.

c. Escolher 5 entre os 9 primeiros exercícios da segunda lista anexada a este documento.

Prof. Leonardo Paulo Maia
ICMC-USP, SMA 181 - Matemática Discreta II
Turma 2-B - Computação - $1^o/2005$

Lista 01 - Regras básicas de contagem e o princípio de inclusão-exclusão

1-) Na hipotética Caipirina, há 20000 habitantes. Um morador dessa cidade diz que cada habitante de lá tem 3 iniciais e que não há dois caipirinos com as mesmas iniciais. Ele diz a verdade?

2-) Estime quanto tempo (em anos) um computador capaz de analisar 1 bilhão de seqüências por segundo levaria para analisar todas as possíveis realizações de um gene com $5 \cdot 10^9$ bases nitrogenadas.

3-) Quantos números de 1 a 1 milhão contêm o algarismo 2?

4-) Enumere todas as possíveis funções Booleanas de duas variáveis.

5-) Quantas são as funções que atribuem 0 ou 1 a cada função Booleana de n variáveis?

6-) Seja $x = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ uma seqüência binária de n "bits", ou seja, $a_i = 0$ ou 1, $i = 1, \ldots, n$. Além disso, seja $\sim$ a operação "NOT", ou seja, $\sim a_i = 1 - a_i$. Uma função Booleana f de n variáveis é chamada *auto-dual* se, para todo $x \in \{0,1\}^n$, $f(x) = f(\sim x)$, onde $\sim x = \{\sim a_1, \sim a_2, \ldots, \sim a_n\}$. Quantas são as funções Booleanas auto-duais de n variáveis?

7-) Em alguns computadores, um inteiro (positivo ou negativo) é representado por seqüências binárias de comprimento p. O último dígito representa o sinal, enquanto os $p - 1$ primeiros representam o valor absoluto do número. Qual é a maior quantidade de inteiros que podem ser representados desta forma? E se um deles precisa ser 0?

8-) Todo inteiro pode ser representado (*não* univocamente) na forma $a.2^b$, em que a e b são inteiros. A representação de ponto flutuante para um inteiro consiste em uma seqüência binária de p dígitos, dos quais os m primeiros determinam a e os $p-m$ restantes codificam b. Cada um desses números, a e b, é representado na forma descrita no exercício anterior.

a. Qual é a maior quantidade de inteiros que podem ser descritos na representação de ponto flutuante?

b. Repita o item a se a representação de ponto flutuante deve ser implementada de modo que o primeiro dígito usado para representar o número a seja necessariamente 1.

c. Repita o item a se pelo menos um 0 deve ser utilizado.

9-) Quantas seqüências binárias têm comprimento 3, 4 ou 5?

10-) Uma comissão deve ser escolhida entre 8 cientistas, 6 leigos e 13 sacerdotes. Se essa comissão deve conter duas pessoas de formações diferentes, quantas são as possíveis configurações?

11-) Quantas palavras de 5 letras começam com f ou não têm essa letra?

12-) De quantas formas é possível obter uma soma igual a 3 ou 4 quando dois dados distinguíveis são lançados?

13-) De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?

14-) Quantos números de 4 dígitos são maiores que 2400 e:

a. têm todos os dígitos diferentes?

b. não têm dígitos iguais a 3, 5 ou 6?

c. têm as propriedades dos itens a e b simultaneamente?

15-) Quantos números diferentes podem ser formados multiplicando alguns (ou todos) dos números 1, 5, 6, 7, 7, 9, 9 e 9?

16-) Quantos divisores inteiros e positivos possui o número 360?

17-) Quantos são os números naturais de 4 dígitos que possuem pelo menos dois dígitos iguais?

18-) Quantos subconjuntos possui um conjunto que tem n elementos?

19-) Escrevem-se os inteiros de 1 até 222222. Quantas vezes o algarismo 0 é escrito?

20-) Escrevem-se números de 5 dígitos (inclusive os começados por 0) em cartões. Como 0, 1 e 8 não se alteram de cabeça para baixo e como 6 de cabeça para baixo se transforma em 9, um só cartão pode representar dois números (por exemplo, 06198 e 86190). Qual é o número mínimo de cartões para representar todos os números de cinco dígitos?

21-) Permutam-se de todos os modos possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6 e 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente.

a. Que lugar ocupa o número 62417?

b. Qual número ocupa o 66^o lugar?

c. Qual é o 200^o algarismo a ser escrito?

d. Qual é a soma dos números assim formados?

22-) De quantos modos é possível acomodar 7 pessoas em cadeiras em fila de modo que duas determinadas pessoas não fiquem juntas?

23-) Quantas são as permutações dos números $(1, 2, \cdots, 10)$ nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

24-) De quantos modos r rapazes e m moças podem se colocar em fila de modo que as moças fiquem juntas?

25-) Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \cdots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k-ésima posição é inferior a $k + 4$, para todo k?

26-) Quantas são as permutações simples dos números $1, 2, \cdots, n$ nas quais o elemento que ocupa a k-ésima posição é maior que $k - 3$, para todo k?

27-) Quantas diagonais possui um polígono de n lados?

28-) Há 5 pontos sobre a reta r e 8 pontos sobre a reta s, paralela a r. Quantos são os quadriláteros convexos com vértices em 4 desses 13 pontos?

29-) Sejam $I_m = \{1, 2, \cdots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, com $m \leq n$. Quantas são as funções $f : I_m \to I_n$ estritamente crescentes?

30-) Quantos são os p-subconjuntos (isto é, subconjuntos com p elementos) de $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ nos quais:

a. a_1 figura;

b. a_1 não figura;

c. a_1 e a_2 figuram;

d. pelo menos um dos elementos a_1 e a_2 figura;

e. exatamente um dos elementos a_1 e a_2 figura.

31-) Quantos são os anagramas da palavra CARAGUATATUBA? Quantos começam por vogal?

32-) Uma fila de cadeiras no cinema tem 20 poltronas. De quantos modos 6 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum casal esteja separado?

33-) De quantos modos é possível colocar em fila h homens e m mulheres, todos de alturas diferentes, de modo que os homens entre si e as mulheres entre si fiquem em ordem crescente de alturas?

34-) De quantos modos podemos dividir 18 pessoas em:

a. 3 grupos de 6 pessoas cada?

b. 2 grupos de 9 pessoas cada?

c. um grupo de 11 pessoas e um grupo de 7 pessoas?

d. 9 grupos de duas pessoas cada?

e. 2 grupos de 4 pessoas e 2 grupos de 5 pessoas cada?

35-) De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que os casais permaneçam unidos?

36-) De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que os casais permaneçam unidos e que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

37-) De quantas maneiras 7 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa circular, sendo que duas determinadas pessoas não devem ficar juntas?

38-) De quantas maneiras 8 meninos e 8 meninas podem formar uma roda para brincar sem que pessoas do mesmo sexo fiquem juntas?

39-) De quantas maneiras 8 meninos e 8 meninas podem formar uma roda para brincar se as meninas devem ficar juntas?

40-) De quantos modos 8 casais podem sentar-se em uma roda gigante de 8 bancos de dois lugares cada um, com cada casal em um banco?

41-) De quantos modos 12 crianças podem ocupar os 6 bancos de dois lugares em uma roda gigante?

42-) Quantos números de 5 algarismos podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 1, 1, 1, 2 e 3?

43-) Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w = 3$?

44-) Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z + w < 6$?

45-) Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z = 10$?

46-) Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z < 10$?

47-) Em quantas soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18$ exatamente duas variáveis são iguais a 1?

48-) Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$ nas quais exatamente 3 incógnitas são nulas?

49-) De quantos modos podem ser pintados 6 objetos iguais usando 3 cores diferentes?

50-) Uma urna contém 7 bolas brancas, 8 bolas vermelhas, 4 amarelas e 6 pretas. De quantas maneiras podemos retirar 6 bolas dessa urna?

51-) De quantas maneiras podemos distribuir 6 maçãs, 7 laranjas e 8 pêras em 3 caixas diferentes de modo que cada caixa receba pelo menos uma fruta de cada tipo?

52-) Determine o número de soluções em inteiros não negativos da equação $x_1+x_2+x_3 = 16$, sendo $x_i \leq 7$, para $i = 1, 2, 3$.

53-) Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z = 12$ nas quais pelo menos uma incógnita é maior que 7?

54-) Determine o número de permutações das letras AABBCCDD nas quais não há letras iguais adjacentes.

55-) Determine o número de permutações de $(1, 2, \cdots, n)$ nas quais não figuram (em posições consecutivas e na ordem dada) nem o par 12, nem o par 23, $\cdots$, nem o par $(n-1), n$.

56-) Quantos são os elementos do conjunto $\{1, 2, \cdots, 500\}$ que são divisíveis por 3 ou 5, mas não são divisíveis por 7?

57-) Em um colégio foram entrevistados 78 estudantes. Destes, 32 estavam fazendo um curso de francês; 40, um curso de física; 30, um curso de matemática; 23, um curso de história; 19, francês e física; 13, francês e matemática; 15, física e matemática; 2, francês e história; 15, física e história; 14, matemática e história; 8, francês, física e matemática; 8, francês, física e história; 2, francês, matemática e história; 6, física, matemática e história e 2 estavam fazendo todos os cursos. Quantos estudantes estavam fazendo pelo menos um curso nas 4 áreas mencionadas?

58-) Relembre a dedução do número de permutações caóticas (permutações de $\{1, \cdots, n\}$ em que nenhum algarismo mantém sua posição original).

59-) Quantas são as permutações de $(1, \cdots, 7)$ que têm exatamente 3 elementos em seu lugar original?

60-) Determine o número de permutações caóticas de $(1, \cdots, 10)$ nas quais os números 1, 2, 3, 4 e 5 ocupam, em alguma ordem, os cinco primeiros lugares.

61-) De quantas formas é possível agendar consultas de 10 minutos para 6 pacientes, que devem ser examinados por dois médicos durante uma mesma hora? Cada um dos 6 pacientes deve ser examinado pelos dois médicos. Em cada consulta, só pode haver um médico e um paciente.

62-) Prove o 1^o lema de Kaplansky (que determina o número de p-subconjuntos de $\{1, \cdots, n\}$ que não contêm números consecutivos) usando o método exposto em aula ou, alternativamente, usando equações com soluções inteiras.

63-) De quantos modos podemos formar uma seqüência de p elementos iguais a 2, q elementos iguais a 1 e r elementos iguais a 0 se dois elementos iguais a zero não podem ser adjacentes?

64-) Quantos são os anagramas de ARARAQUARA que não possuem duas letras A consecutivas?

65-) Calcule o valor da soma $S = 2.1^2 + 5.2^2 + 8.3^2 + \cdots + (3n-1).n^2$.

Gabarito

1-) não

2-) é um número da ordem de $3.10^{3.10^9}$

3-) 468559

5-) $2^{2^{2^n}}$

6-) $2^{2^{n-1}}$

7-) 2^p; 2^{p-1}

8-) a. 2^p b. 2^{p-1} c. $2^p - 2$

9-) 56

10-) Quem interpretou que todas as comissões deveriam ser formadas por *exatamente* duas pessoas deveria ter obtido o resultado 230. Entretanto, eu interpreto o enunciado de forma que as comissões deveriam ter *pelo menos* duas pessoas, e a resposta é $2^{27} - 2^6 - 2^8 - 2^{13} + 2$.

11-) $26^4 + 25^5$

12-) 5

13-) 60

14-) a. 3864 b. 1567 c. 560

15-) 48

16-) 24

17-) 4464

18-) 2^n

19-) desconsiderem este exercício

20-) 98475

21-) a. 81 b. 46721 c. 1 d. 5333280

22-) 3600

23-) 604800

24-) $m!(r+1)!$

25-) 6.4^{n-3}

26-) 2.3^{n-2}

27-) $\dfrac{n(n-3)}{2}$

28-) 280

29-) $C(n,m)$

30-) a. $C(n-1,p-1)$ b. $C(n-1,p)$ c. $C(n-2,p-2)$
d. $C(n,p)-C(n-2,p)$ ou $2\,C(n-1,p-1)-C(n-2,p-2)$
e. $2\,C(n-2,p-1)$ ou $2\,C(n-1,p-1)-2\,C(n-2,p-2)$

31-) $\dfrac{13!}{5!2!2!}$; $\dfrac{12!}{4!2!2!}+\dfrac{12!}{5!2!}$

32-) 138378240

33-) $C(m+h,m)$

34-) a. $\dfrac{18!}{3!(6!)^3}$ b. $\dfrac{18!}{2!(9!)^2}$ c. $C(18,7)$ d. $\dfrac{18!}{9!(2!)^9}$ e. $\dfrac{18!}{(2!4!5!)^2}$

35-) $2^n(n-1)!$

36-) $2(n-1)!$

37-) 480

38-) 7!8!

39-) 8!8!

40-) $2^8.7!$

41-) 2.11!

42-) 30

43-) 20

44-) 126

45-) 36

46-) 84

47-) 660

48-) 3420

49-) 28

50-) 80

51-) 3150

52-) 21

53-) 45

54-) 864

55-) $(n-1)!\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{n-i}{i!}$

56-) 200

57-) 69

59-) 315

60-) 1936

61-) 190800

63-) $C(p+q+1,r).C(p+q,p)$

64-) 120

65-) $18\,C(n+3,4)-20\,C(n+2,3)+4\,C(n+1,2)$

Prof. Leonardo Paulo Maia
ICMC-USP, SMA 181 - Matemática Discreta II
Turma 2-B - Computação - 1º/2005

Lista 02 - Funções geradoras ordinárias

1-) Obtenha a função geradora ordinária das seqüências abaixo:

a. $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \cdots)$ b. $(1, 0, 0, 2, 3, 0, 0, 0, 0, \cdots)$ c. $(3, 3, 3, \cdots)$
d. $(0, 1, 3, 1, 1, 1, 1, \cdots)$ e. $(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \cdots)$ f. $(0, 2, 0, 2, 0, 2, \cdots)$
g. $a_k = \dfrac{2}{k!}$ h. $a_k = \dfrac{2^k}{k!}$ i. $\left(\dfrac{1}{3!}, \dfrac{1}{4!}, \dfrac{1}{5!}, \cdots\right)$
j. $\left(\dfrac{1}{0!}, -\dfrac{1}{1!}, \dfrac{1}{2!}, -\dfrac{1}{3!}, \cdots\right)$

2-) Descubra a seqüência cuja função geradora ordinária é:

a. $(x+1)^4$ b. $\dfrac{1}{1-3x} + \dfrac{4x}{1-x}$ c. $1 + (1-x^2)^{-1}$
d. $\left(\dfrac{2}{1-x}\right) \cdot \left(\dfrac{3}{1-x}\right)$ e. $x^2 e^x$ f. $x^3(1-4x)^{-1}$
g. $\dfrac{x^5 + x^6}{1-x}$ h. $\dfrac{x^2 - 3x}{1-x} + 7$ i. $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
j. $e^{-x} + 3x$ k. $(1+x)^q$, $q \in \mathbb{N}$ l. $(1-x)^{\frac{1}{3}}$

3-) Se $g(x) = (1 + 10x^2)(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots)$ é a função geradora ordinária da seqüência (a_k), determine a_{11}.

4-) Prove que, se $n \in \mathbb{N}^*$ (é claro que $p \in \mathbb{N}$), $\begin{pmatrix} -n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+p-1 \\ p \end{pmatrix}$.

5-) Encontre o coeficiente de x^{27} em $(x^3 + x^4 + x^5 + \cdots)^6$.

6-) Encontre o coeficiente de x^{300} em $(x^{20} + x^{40} + x^{60} + x^{80} + x^{100})^4$.

7-) De quantas formas é possível obter um total de 15 pontos quando 4 dados diferentes são lançados?

8-) Representantes de três institutos de pesquisa devem formar uma comissão de 9 pesquisadores. De quantos modos se pode formar esta comissão se nenhum instituto deve ter maioria absoluta no grupo?

9-) De quantas formas é possível embrulhar 10 caixas idênticas, cada uma com uma única cor, se estão disponíveis as cores vermelho, azul, verde e amarelo, mas só há papel vermelho para até duas caixas e papel azul para 3 caixas, no máximo?

10-) Determine a função geradora ordinária cujo termo a_r é o número de soluções em inteiros não negativos da equação $2x + 3y + 4z + 5w = r$.

11-) Determine o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$, com $x_i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

12-) Em uma competição, cada um dos 4 juízes deve atribuir notas de 1 a 6 a cada participante. Para ser um finalista, um competidor deve ter, no mínimo, 22 pontos. De quantas formas os juízes podem atribuir notas a um participante para que ele seja um finalista?

13-) Quantas soluções possui a equação $x_1 + \cdots + x_n = r$, se cada variável é igual a 0 ou 1?

14-) De quantas formas é possível distribuir 11 laranjas e 6 pêras entre 3 crianças de modo que cada uma receba pelo menos 3 laranjas e, no máximo, duas pêras?

15-) Qual é a função geradora ordinária da seqüência $a_k = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k$?

16-) De quantas maneiras é possível distribuir trezentas cadeiras idênticas em 4 salas de modo que o número de cadeiras em cada sala seja 20 ou 40 ou 60 ou 80 ou 100?

Gabarito

1-)

a. $g(x) = 1 + x + x^2$

b. $g(x) = 1 + 2x^3 + 3x^4$

c. $g(x) = \dfrac{3}{1-x}$

d. $g(x) = \dfrac{1}{1-x} - 1 + 2x^2$

e. $g(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$

f. $g(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

g. $g(x) = 2e^x$

h. $g(x) = e^{2x}$

i. $g(x) = \dfrac{1}{x^3}\left(e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}\right)$

j. $g(x) = e^{-x}$

2-)

a. $(1, 4, 6, 4, 1, 0, 0, 0, \cdots)$

b. $a_k = \begin{cases} 3^k + 4, & \text{se } k \geq 1 \\ 1, & \text{se } k = 0 \end{cases}$

c. $(2, 0, 1, 0, 1, \cdots)$

d. $a_k = 6(k+1)$

e. $\left(0, 0, \dfrac{1}{0!}, \dfrac{1}{1!}, \dfrac{1}{2!}, \cdots\right)$

f. $a_k = \begin{cases} 4^{k-3}, & \text{se } k \geq 3 \\ 0, & \text{se } k \leq 2 \end{cases}$

g. $(0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, \cdots)$

h. $(7, -3, -2, -2, -2, \cdots)$

i. $\left(1, 0, \dfrac{1}{2!}, 0, \dfrac{1}{4!}, 0, \dfrac{1}{6!}, \cdots\right)$

j. $a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{k!}, & \text{se } k \neq 1 \\ 2, & \text{se } k = 1 \end{cases}$

k. $a_k = \begin{pmatrix} q \\ k \end{pmatrix}$

l. $a_k = (-1)^k \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ k \end{pmatrix}$

3-) 112 5-) 2002 6-) 52 7-) 140 8-) 10 9-) 102

10-) $\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)\left(\dfrac{1}{1-x^3}\right)\left(\dfrac{1}{1-x^4}\right)\left(\dfrac{1}{1-x^5}\right)$

11-) 104

12-) 15

13-) $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$

14-) 6

15-) $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$

16-) 52