

Notas de Aula – FGE 417 : Fenômenos Não-Lineares em Física: Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos

Reynaldo D. Pinto - 1º semestre/2007

A idéia da disciplina FGE 417:

Após o livro de divulgação científica “Caos – a criação de uma nova ciência” de James Gleick em 1987 ter sido o mais vendido por vários meses – uma façanha notável para um livro que fala de matemática e ciência, o “mundo do caos” tem se tornado cada vez mais popular. No início o apelo estético de figuras coloridas hipnóticas, construídas usando ferramentas da Teoria do Caos e dos Fractais, atraiu a atenção de muitas pessoas para essas idéias e hoje em dia existem até alguns filmes que usam ou retratam certos aspectos matemáticos da Teoria do Caos, como a sensibilidade às condições iniciais que aparecem em “Efeito Borboleta I”, “II” e “Corra Lola, corra”. A evolução da Teoria dos Sistemas Dinâmicos Não-Lineares não pode ser separada da popularidade dos computadores que também permitiu aos “leigos” em matemática brincar com figuras produzidas por atratores caóticos e fractais.

Neste curso introdutório vamos nos aprofundar um pouco na matemática por trás das figuras, discutir as idéias da Teoria do Caos e dos Sistemas Dinâmicos Não-Lineares e a revolução que produziram na Mecânica Clássica, além de apresentar aplicações à diversas áreas do conhecimento como Biologia, Física, Engenharia, Neurociência, Psicologia, etc... O curso será dado em um estilo informal e com grande ênfase à interpretação geométrica.

Introdução:

O estudo de sistemas dinâmicos é bastante antigo, teve início nos primórdios da Teoria Física Clássica quando Newton em meados do século XVII inventou as equações diferenciais, suas leis do movimento e a gravitação universal, combinando-as para explicar as leis de Kepler do movimento planetário. Newton resolveu o problema de 2 corpos: calcular o movimento da Terra em torno do Sol dada a atração gravitacional ($\sim 1/r^2$) entre eles. Muitas gerações subsequentes de físicos e matemáticos tentaram estender os métodos analíticos de Newton para resolver o problema de 3 corpos (por ex. Terra, Sol e Lua) mas este mostrou-se muito mais difícil. Depois de diversas décadas, finalmente foi provado que o problema de 3 corpos é essencialmente impossível de resolver (no sentido de obter as fórmulas explícitas que indiquem a posição dos corpos em função do tempo).

Apenas no fim do século XIX, com o trabalho de Poincaré é que ocorreram novos grandes progressos em dinâmica. Poincaré introduziu uma nova maneira de encarar o problema, enfatizando características mais qualitativas ao invés de quantitativas. Por exemplo, ao invés de perguntar “Qual a posição exata dos planetas em função do tempo?” ele perguntou “O sistema solar é estável para sempre ou ele vai se desintegrar com alguns planetas se afastando para o infinito?”.

A abordagem geométrica desenvolvida por Poincaré mostrou-se tão poderosa que é graças a ela que a teoria de sistemas dinâmicos pode ser aplicada em assuntos completamente diferentes da mecânica celestial. Poincaré foi o primeiro a perceber a possibilidade do *Caos* (em que um sistema determinístico apresenta comportamento aperiódico que depende sensivelmente das condições iniciais, tornando impossível fazer previsões para tempos longos), mas as idéias da Teoria do Caos permaneceram em segundo plano até a metade do século XX.

Em meados do século passado, do lado experimental, o estudo de osciladores não-lineares foi importantíssimo para o desenvolvimento de diversas tecnologias, como o rádio, o radar e os lasers, enquanto de uma perspectiva teórica, todo um arsenal de novas técnicas matemáticas foi criado para lidar com tais osciladores. Nestes aspectos podemos ressaltar os trabalhos pioneiros de

van der Pol, Andronov e Smale entre outros. Enquanto isso os métodos geométricos de Poincaré foram generalizados para permitir um entendimento mais profundo de toda a mecânica clássica, graças a nomes como Birkhoff, Kolmogorov, Arnold e Moser.

Por volta de 1950 a invenção do computador digital representou um divisor de águas na história da dinâmica. Agora era possível realizar experimentos numéricos, simular equações matemáticas de um modo que era impossível fazer até então e desenvolver alguma intuição sobre o comportamento de sistemas não lineares. Em um desses experimentos em 1963 Lorenz (que foi estudante de Birkhoff) mostrou a existência de movimento caótico em um “atrator estranho” - a famosa “borboleta” obtida a partir da simulação de um modelo simplificado dos rolos de convecção atmosférica: as soluções que encontrou para o sistema nunca iam para um estado periódico ou de equilíbrio, mas continuavam a oscilar sempre de modo aperiódico. Além disso, se iniciasse sua simulação a partir de condições iniciais ligeiramente diferentes (uma diferença de 1 em 10000) os resultados que obtinha tornavam-se rapidamente muito diferentes, levando a uma impossibilidade de prever o comportamento para longos períodos de tempo. Assim, pequenos erros em medir o estado atual da atmosfera eram rapidamente amplificados e levavam a previsões completamente enganadas. Ele também percebeu a complexidade da região com formato de borboleta obtida do conjunto de pontos de suas simulações chamando-a de um “complexo infinito de superfícies” - hoje chamado de fractal. Seu trabalho entretanto teve pouco impacto até ~1970 quando a Teoria do Caos realmente “explodiu”. Hoje em dia é comum encontrar físicos que acreditam que a Teoria dos Sistemas Dinâmicos Não Lineares e do Caos representou um renascimento da Mecânica Clássica no século XX. Concordando com essa afirmação ou não é impossível ficar indiferente às mudanças na maneira de abordar alguns problemas que estas terias representam.

Abaixo apresentamos um resumo bastante simplificado da história da dinâmica:

1666 1700s	Newton	Invenção do cálculo, explicação do movimento planetário. florescimento do cálculo e da mecânica clássica
1800s 1890s 1920-1950	Poincaré	estudos analíticos do movimento planetário abordagem geométrica, “pesadelo” do Caos osc. ã lineares em física e engenharia, radio, radar, laser
1920-1960	Birkhoff Kolmogorov Arnol'd Moser	comportamento complexo em mecânica clássica
1963	Lorenz	atrator estranho em modelo simplificado de convecção
1970s	Ruelle & Takens May Feigenbaum	turbulência e chaos caos no mapa logístico universalidades e renormalização, conexão entre caos e transições de fase. estudos de caos experimental
	Winfrey Mandelbrot	osciladores não lineares em biologia fractais
1980 em diante		espalhou-se o interesse geral em caos, fractais, osciladores não lineares e suas aplicações em diversas áreas do conhecimento.

Algumas definições e conceitos:

Idéias por trás de uma modelagem:

<i>REAL</i>		<i>CONSTRUÇÃO HUMANA</i>		<i>CONCEITO</i>
fenômeno observado	--->	idealização matemática	----> modelo (várias idas e voltas)	previsões --> modelo --> fenômeno (conceito)

Porque fazer modelos? -> permitem estudar (“entender”) melhor os fenômenos e fazer previsões.

Como é o processo de idealização matemática?

1 - Um “organismo” (físico, biológico, social, etc...) é observado em diferentes estados. Na verdade observa-se alguns dos parâmetros que acreditamos caracterizar os estados em que estamos interessados... Na maioria dos casos observar apenas alguns dos parâmetros não é suficiente, mas assumiremos que seja uma “boa aproximação”.

2 – Construímos um espaço de estados (ou espaço de fases) do modelo – que é uma representação geométrica do sistema real. Cada ponto no espaço de estados representa um conjunto particular de medidas dos parâmetros que caracterizam o sistema, assim cada ponto representa um estado diferente do sistema. A relação entre os estados que o organismo real apresenta e os pontos obtidos no modelo geométrico é mantida para efeitos de discussão, análise, etc... e é chamada de “*interpretação convencional*”.

Bons e maus modelos:

Qual o melhor modelo de uma pessoa?

FOTOGRAFIA?



BUSTO DE MOULAGE?



MACACO?



DEPENDE!!!

A foto captura muitos detalhes e cores do rosto e pode ser adequada para um artista plástico, um busto de moulage tem as proporções do corpo e é ideal para um alfaiate ou costureiro, já o macaco tem um sistema nervoso e imunológico similar ao humano, podendo ser ideal para um biólogo ou médico.

A escolha do(s) parâmetros que caracterizam o modelo

exemplos:

Torradeira --> temperatura

saúde de uma pessoa --> temperatura (+ ou – adequado: para infecções funciona bem)

honestidade de uma pessoa --> temperatura ??? inadequado

Tradução do modelo em equações:

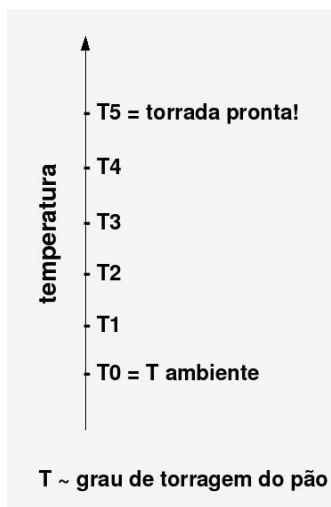
Quando conseguimos encontrar alguns parâmetros que caracterizem bem o fenômeno que queremos estudar é muito útil saber como estes parâmetros dependem uns dos outros e do tempo... Aí nosso trabalho é procurar equações matemáticas que expressem essas relações. Quando encontramos essas equações podemos estudá-las de um ponto de vista matemático e “a posteriori” comparar as previsões matemáticas com as observações do fenômeno modelado. Muitas vezes o conjunto de parâmetros e os possíveis valores que podem assumir mais as equações acopladas que exprimem como estes parâmetros variam é chamado de sistema dinâmico, mas a idéia de sistema dinâmico é muito mais abrangente.

sistema -> é um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto.

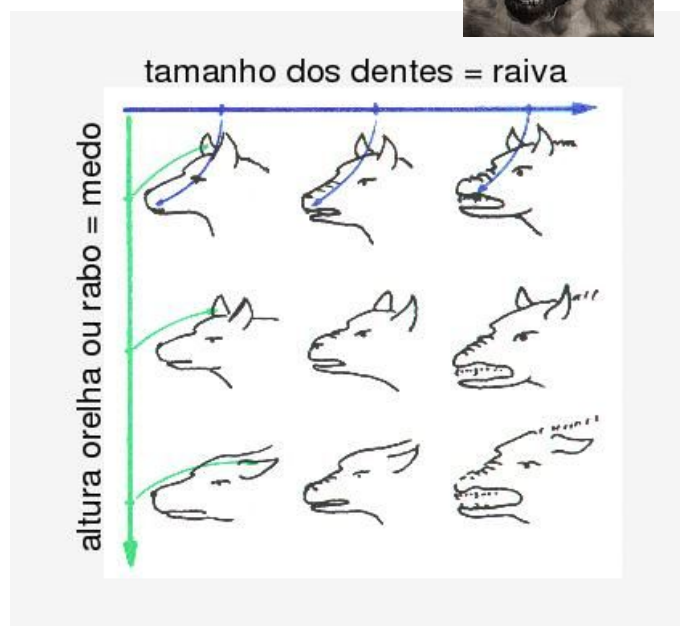
sistema dinâmico -> é um sistema em que as grandezas que caracterizam os objetos variam com o tempo.

Exemplos de espaços de estados de sistemas dinâmicos:

- uniparamétrico
(torradeira)



- 2 parâmetros
(estado emocional de um cão)



Dada uma condição inicial do sistema, as variações temporais dos parâmetros produzem órbitas no espaço de fase (e uma trajetória na(s) série(s) temporal(ais)).

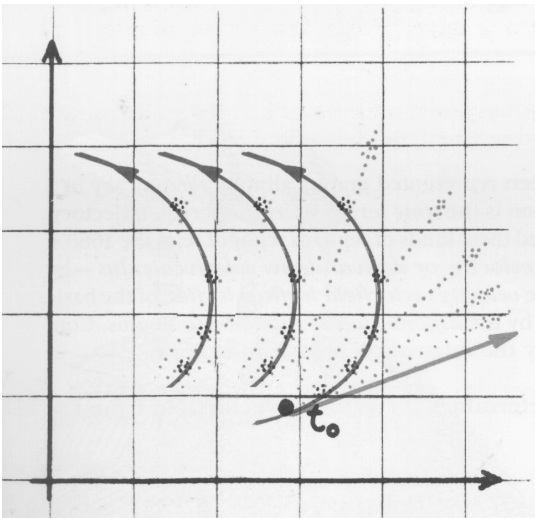
As órbitas não podem ser quaisquer, elas são intimamente relacionadas com as regras de evolução, ou seja com o modo como as partes do sistema interagem para produzir um comportamento.

Assim, um mesmo comportamento pode ser estudado usando duas representações diferentes:

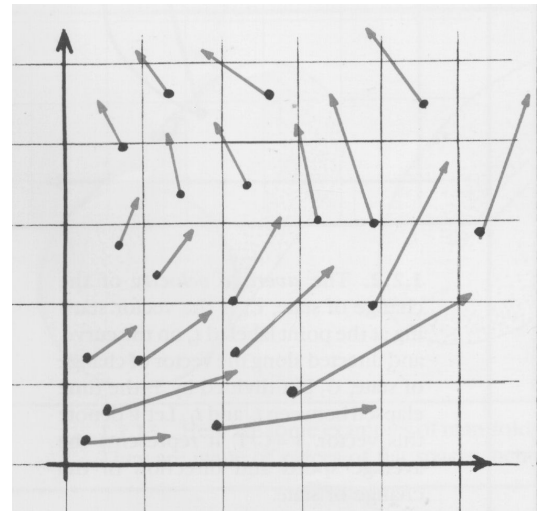
- série temporal (gráfico da trajetória – $x(t)$, $y(t)$, etc...);
- trajetória no espaço de estados – $y(x)$, $z(x,y)$.

Newton (~1660) -> velocidade instantânea, ou derivada do cálculo vetorial.

trajetórias diferenciação
 ----->
 <-----
 integração vetores velocidade



trajetórias (fluxo)



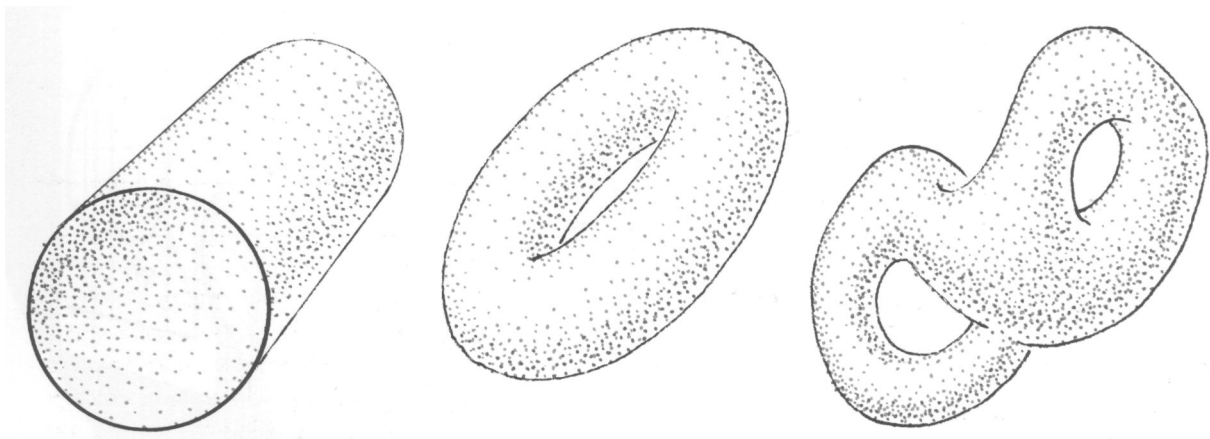
campo vetorial (velocidades)

O espaço de estados preenchido com trajetórias é chamado de **retrato de fases** do sistema dinâmico. O campo vetorial é obtido do retrato de fases por diferenciação e deve ser suave.

Na verdade *a escolha do campo vetorial é o ponto crucial da modelagem, ou seja, o vetor velocidade deve ser exatamente igual ao vetor especificado pelo sistema dinâmico.*

A análise (Newton/Leibniz) estabelece que para um ponto inicial existe uma única trajetória do sistema - > unicidade da solução ==> previsão ===> determinismo!

Nem sempre o modelo geométrico é um espaço de coordenadas cartesianas (x,y,z) já que as variáveis não são independentes, mas sim “hipersuperfícies” formadas por estas variáveis – isso tem uma implicação importante que será discutida mais adiante: a dimensão ocupada pelas trajetórias no espaço de fase é muitas vezes menor que a dimensão do espaço de fase (numero de variáveis) usado para modelar um determinado fenômeno. Na teoria de sistemas dinâmicos estas hipersuperfícies são modelos geométricos com propriedades especiais, conhecidos como **variedades (ou manifolds)**.



Exemplos de variedades em sistemas dinâmicos.

SISTEMA DINÂMICO = CAMPO VETORIAL SUAVE SOBRE UMA VARIEDADE.