FGE 417
Fenômenos Não Lineares em Física: Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos
Notas de aula - Parte 2

Exemplo 1: Um modelo de dinâmica populacional

Após a publicação de "A riqueza das nações" em 1776 pelo escocês Adam Smith, considerado um dos filósofos do capitalismo clássico, a Inglaterra vivia a 1ª revolução industrial e estabeleciam-se as regras do capitalismo econômico.

A disputa entre os latifundiários e os industriais, os primeiros defendendo uma política de proteção a restrições às importações de gêneros agrícolas e os segundos defendendo o livre cambismo, foi acompanhada por dois importantes pensadores: Malthus e Ricardo.

Diante da questão social representada pela crescente miséria do operariado, o religioso Thomas Malthus (1766-1834) elaborou sua "Teoria da População" apresentada em seu livro "Ensaio sobre o princípio da População" publicado em 1788.

Segundo ele a população crescia em progressão geométrica com maior rapidez que os meios de subsistência, que cresciam em progressão aritmética. O resultado era a miséria e a pobreza que se assistia na Inglaterra devido ao desequilíbrio entre os recursos naturais e a necessidade do povo.

Malthus era contrário a qualquer tentativa do Estado de resolver o problema da miséria: "Um homem que nasce em um mundo já ocupado não tem o direito de reclamar parcela alguma de alimento. No grande banquete da natureza não há lugar para ele. A natureza intimida-o a sair e não tarda em executar a intimação...".

O modelo de Maltus para a dinâmica populacional teve implicações sociais e econômicas que ainda influem na organização mundial contemporânea.

Além disso, suas propostas influenciaram outros estudiosos como Charles Darwin (1809-1882) que baseou-se nelas para elaborar suas idéias sobre seleção natural.

Simplificações do modelo de Malthus:

i) A densidade populacional é suposta uma distribuição homogênea ou o crescimento em uma região compensa a diminuição em outra $N(r,t)=N(t)$.
ii) *Emigração = Imigração* ou ambos são nulos.
iii) *Nascimentos* $= n.N(t)$ onde n é a taxa de natalidade
iv) *Mortes* $= m.\ N(t)$ onde m é a taxa de mortalidade

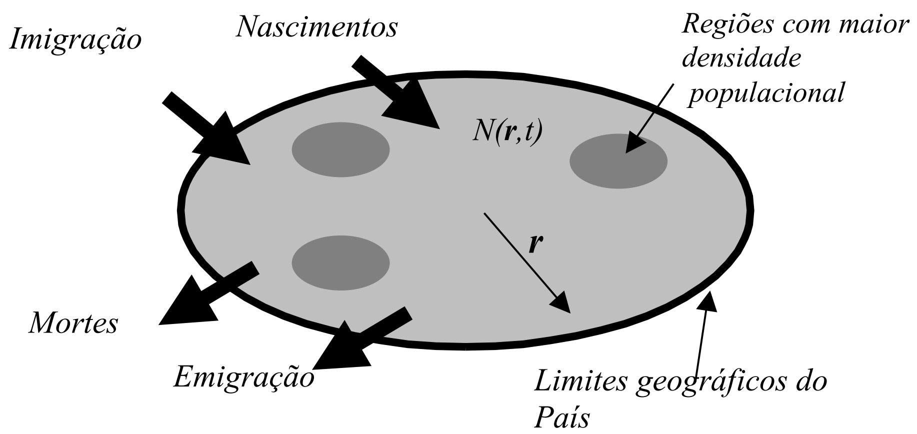

Figura 1 . Modelo de Malthus de dinâmica populacional onde *N(**r**,t)* é a função de densidade populacional e **r** é a posição em coordenadas geográficas.

Como *N(t)* varia no tempo? Com a diferença entre o número de nascimentos e de mortes:

$$\frac{dN(t)}{dt} = n.N(t) - m.N(t) = (n-m).N(t) \qquad (1)$$

Os parâmetros *n* e *m* são considerados fixos no intervalo de tempo em questão. A solução da equação 1 é

$N(t) = N(0).e^{rt}$ onde $r = n\text{-}m$ e o crescimento vegetativo.

Para $r > 0$ a população cresce exponencialmente e para $r<0$ a população decresce exponencialmente.

Retrato de fases

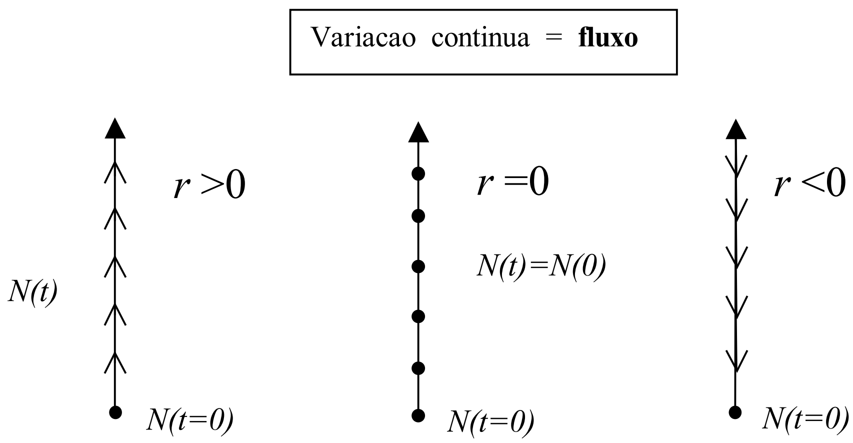

__Figura 2__: Observamos que os retratos de fases mudam qualitativamente quando variamos o parâmetro r . Esta mudança qualitativa é chamada de __bifurcação__.

Outro modo de ver este resultado:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = r.N(t)$$

$$N(t+\Delta t) = N(t) + \Delta t.r.N(t)$$

para Δt=1 ano por exemplo,

$$N(t+1) = N(t) + r.N(t) = (r+1)N(t)$$

$$N(t+1) = \alpha.N(t) \qquad (2)$$

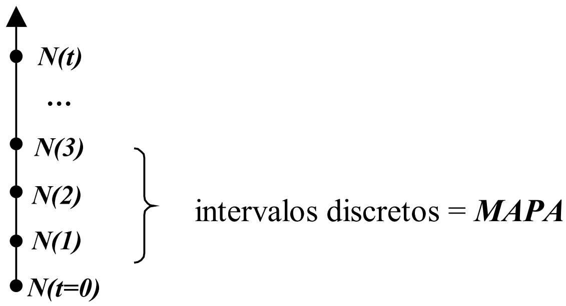

Figura 3 *Representação discretizada do modelo segundo a equação 2*

Então, se α >1 indica crescimento em progressão geométrica de acordo com o modelo de Malthus.

Como a produção de alimentos e recursos varia com o tempo?

Número de trabalhadores
aumenta exponencialmente

$$R \sim N.(\text{"}terra\text{"}).(\text{"}capital\text{"})$$

Limitados
crescem no máximo
linearmente no tempo $\longleftarrow$ $\frac{dR(t)}{dt} = \beta = cte$

$$R(t) = R(t_0) + \beta(t - t_0)$$

$R(t+1) = R(t) + \beta \longrightarrow$ ***Progressão aritmética***

Mais detalhes e referências relacionadas:

http://www.mtholyoke.edu/courses/jmorrow/math_models.htm
http://www.hystoria.hpg.ig.com.br/Ribclas.html
Adam Smith -*A riqueza das nações*
Charles Darwin- *A origem das espécies e a seleção natural.*

Exemplo 2: O pêndulo simples

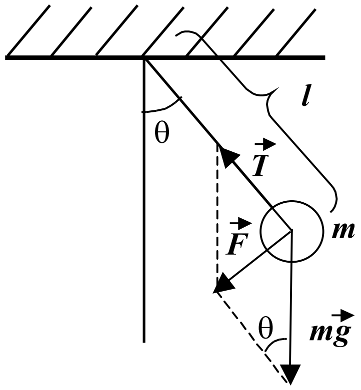

Figura 4 A força resultante sobre o pêndulo $\vec{F}$ é a soma vetorial da força peso $m\vec{g}$ com a tração $\vec{T}$

Newton $\longrightarrow$ $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$; $\vec{p} = m\vec{v}$

Deslocamento tangencial:

$$\left.\begin{array}{l} F_t = -mg.\sin\theta \\ p_t = m.v_t = ml\dot{\theta} \end{array}\right\} \quad -mg.\sin\theta = \frac{d(ml\dot{\theta})}{dt} \longrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \qquad (3)$$

Não existe solução analítica para a equação 3, mas se considerarmos $\theta << 1$ então, θ =senθ e a equação 3 torna-se linear e solúvel na forma:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \quad \text{para} \quad \theta << 1$$

Que é a equação do pêndulo linearizada e ensinada nos cursos de física básicos. Mas será que não podemos aprender algo sobre o pêndulo sem resolver analiticamente a equação do movimento?

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt} = \varphi = f(\theta,\varphi) \\ \dot{\varphi} = \dfrac{d\varphi}{dt} = \ddot{\theta} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta = h(\theta,\varphi) \end{array}\right\}$$

Introduzindo a nova variável φ obtemos duas equações diferenciais de primeira ordem

Como é o retrato de fases no espaço φ (θ) ?

$$\frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{f(\theta,\varphi)}{h(\theta,\varphi)} = \frac{\varphi}{-\frac{g}{l}\sin\theta}$$

$$-\frac{g}{l}\sin\theta.d\theta = \varphi.d\varphi$$

Integrando dos dois lados,

$$\varphi^2 - a.\cos\varphi = E_t$$

onde E_t é uma constante correspondente à energia total e $a = \frac{2g}{l}$. O termo $\varphi^2 = \dot{\theta}^2$ é o quadrado da velocidade angular, e portanto diz respeito a energia cinética do sistema, enquanto que o termo $a.\cos\varphi$ corresponde a energia potencial. Assim,

$$\varphi = \pm\sqrt{E_t + a\cos\theta} \quad \begin{cases} \theta = 0,\ 2\pi,\ 4\pi\ \ldots\ \text{equilíbrio estável} \\ \theta = \pi,\ 3\pi\ \ldots\ \text{equilíbrio instável} \end{cases}$$

Retrato de fases do pendulo simples

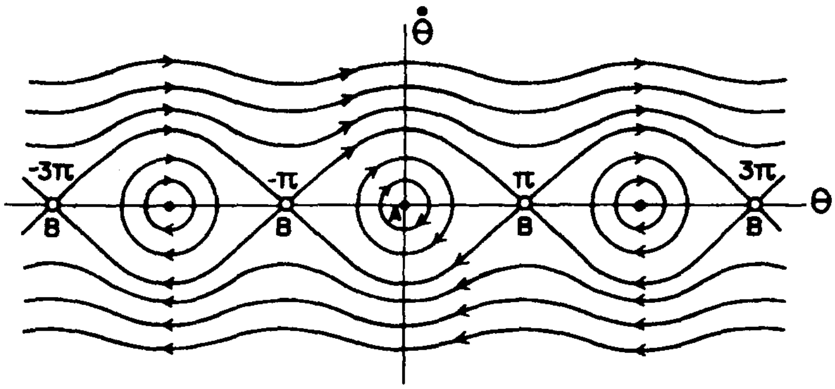

Figura 5 *Retrato de fases* φ (θ *) do pêndulo simples. Com velocidade nula, em* θ = 2*n*π (*bolas fechadas) os sistema se encontra em equilíbrio estável, e em* θ = (2*n+1)*π (*bolas abertas) os sistema se encontra em equilíbrio instável*