FGE417- Fenômenos Não-Lineares em Física: Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos

Prof. Reynaldo Daniel Pinto

Notas de Aula: Parte 3

1. Estabilidade Linear e Pontos de Equilíbrio

Considere o sistema dinâmico linear:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = g(x, y)$$

Definindo: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$

$\dot{\vec{x}} = \boldsymbol{f}\,\vec{x}$ onde $\boldsymbol{f}$ é uma matriz quadrada 2 **x** 2.

Podemos generalizar para n dimensões:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \cdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

$\dot{\vec{x}} = \boldsymbol{F}\,\vec{x}$ onde $\boldsymbol{F}$ é uma matriz quadrada n **x** n

Ponto fixo $P^* = \vec{x}$

Uma vez que o sistema é colocado em P^* ele permanece para sempre em P^*, ou seja,

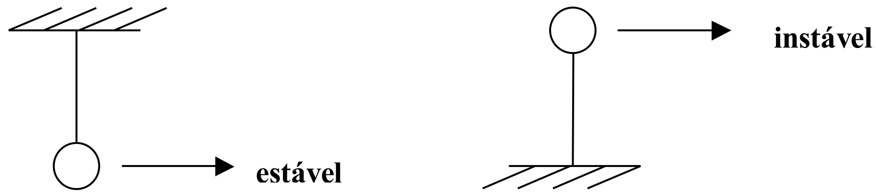
$$\dot{\vec{x}}^* = 0 \longrightarrow \boldsymbol{F}(\vec{x}^*) = 0$$

Exemplo Pêndulo simples:

$$\dot{\theta} = \varphi \longrightarrow \varphi^* = 0$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\theta \longrightarrow \theta^* = n\pi$$

Um ponto fixo ou ponto de equilíbrio $\vec{x}^*$ é chamado estável se a resposta do sistema a uma pequena perturbação permanece pequena quando $t \to \infty$.



$\vec{x}^*$ é **assintoticamente estável** se a resposta do sistema a uma pequena perturbação aproxima-se de $\vec{x}^*$ quando $t \to \infty$ $\boxed{\vec{x}^* \text{ então é chamado de } \textbf{ATRATOR.}}$

O conjunto de todas as possíveis condições iniciais do espaço de fases que converge para o mesmo atrator é chamado **bacia de atração** deste atrator; $\vec{x}^*$ é um ponto de **equilíbrio instável** se a perturbação cresce quando $t \to \infty$.

Obs: se $\vec{x}^*$ é assintoticamente estável então $\vec{x}^*$ é estável, mas o inverso pode não ocorrer !

2. Estabilidade estrutural

Consideremos $\dot{x} = \lambda x$

$x^*=0$ $\longrightarrow$ ponto de equilíbrio

$x(t) = e^{\lambda t}$ $\longrightarrow$ solução

Se $\lambda < 0$ então x é assintoticamente estável.

Se $\lambda \leq 0$ então x é estável

Se $\lambda > 0$ então x é instável

λ é um parâmetro que define como é a estrutura qualitativa do retrato de fases. Quando λ passa de negativo para positivo o sistema muda seu comportamento qualitativo, ou seja, uma pequena perturbação em λ quando $\lambda = 0$ é suficiente para que o sistema perca sua estabilidade estrutral e dizemos que ocorre uma bifurcação em $\lambda = 0$.

Estabilidade local $\longrightarrow$ Pontos fixos

Estabilidade estrutural $\longrightarrow$ Mudanças qualitativas do retrato de fases quando mudamos um parametro

Um sistema é denominado estável se para qualquer perturbação suficientemente pequena das equações, ou seja, pequenas mudanças nos parâmetros que o definem, o fluxo resultante é topologicamente equivalente àquele das equações sem a perturbação.

Seja o sistema dinâmico linear:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by = f(x, y) \\ \dot{y} &= ax + by = g(x, y) \end{aligned}\right\} \text{(i)}$$

Ponto de equilíbrio $\longrightarrow$ $(x^*, y^*) = (0, 0)$

A solução geral é do tipo:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= e^{\lambda t}.x_0 \\ y(t) &= e^{\lambda t}.y_0 \end{aligned}\right\} \text{(ii)}$$

(i) em (ii):

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}.x_0 = ae^{\lambda t}x_0 + be^{\lambda t}y_0$$

$$\dot{y} = \lambda e^{\lambda t}.y_0 = ce^{\lambda t}x_0 + de^{\lambda t}y_0$$

$$\left.\begin{aligned} (a - \lambda)x_0 + by_0 &= 0 \\ cx_0 + (d - \lambda)y_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(iii)}$$

(iii) só terá uma solução não trivial se o determinante da matriz dos coeficientes for nulo, ou seja se

$$\det\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J} \longrightarrow \text{matriz jacobiana}$$

Generalizando para dimensão arbitrária:

$\boldsymbol{J} = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \longrightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \boldsymbol{J}\,\vec{x}(t)$

A solução é: $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\,\vec{x}_0$

Escrevendo da forma:

$\boxed{(\boldsymbol{J} - \lambda\ \boldsymbol{1})\ \vec{x}_0 = 0}$ onde ***1*** é a matriz identidade,

reduzimos o problema a encontrar os autovalores e autovetores de ***J***.

Aplicando ao caso bidimensional (i) obtemos uma equação de 2º grau

$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

com duas raízes λ_1 e λ_2 que definem a estabilidade do ponto de equilíbrio (0,0).

Para n dimensões $\longrightarrow$ $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_n$ reais ou complexos

$$\lambda = \mathrm{Re}(\lambda) + i\,\mathrm{Im}(\lambda)$$

$$\vec{x}(t) = e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}.e^{i.\mathrm{Im}(\lambda)t}\,\vec{x}_0$$

$e^{i.\mathrm{Im}(\lambda)t} \longrightarrow$ oscilação

A **estabilidade** está relacionada com a parte real da raiz:

Se $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, então $\vec{x}(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$ $\longrightarrow$ **INSTÁVEL**

Se $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, então $\vec{x}(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ $\longrightarrow$ **ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL**

$\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0 \longrightarrow$ **equilíbrio hiperbólico** ou não degenerado

$\mathrm{Re}(\lambda) = 0 \longrightarrow$ equilíbrio não-hiperbólico, **elíptico** ou degenerado

<u>Conceito de estabilidade de Lyapunov</u>:

$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ para todo i $\Longrightarrow$ **estabilidade assintótica**

$\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ para um ou mais valores de i $\Longrightarrow$ **instabilidade**