FGE417- Fenômenos Não-Lineares em Física: Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos

Prof. Reynaldo Daniel Pinto

Notas de Aula: Parte 5

Ferramentas Matriciais para classificação de pontos fixos de sistemas dinâmicos

Considere o sistema onde $\boldsymbol{J}$ é a matriz linear ou linearizada:

$$\dot{\vec{x}} = \boldsymbol{J}\vec{x}$$

Pontos fixos → $\vec{x}^*$

$\lambda \rightarrow$ autovetor associado a $\vec{x}^*$

$det(\boldsymbol{J} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$ → achar os λ's (autovalores) e direções (autovetores)

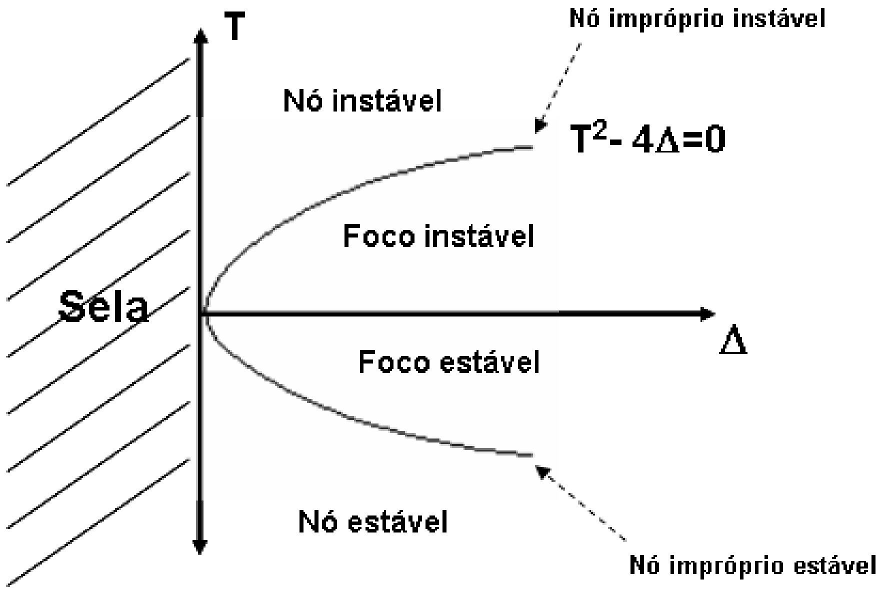
Caso bidimensional

$$\lambda_{1,2} = \frac{-T + \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}$$ → T é o traço de $\boldsymbol{J^*}$ e Δ é o determinante de $\boldsymbol{J^*}$

- $\Delta < 0 \rightarrow \lambda_{1,2}$ são reais e têm sinais opostos → **ponto de sela instável**

- $\Delta < 0$ e $(T^2 - 4\Delta) > 0 \rightarrow \lambda_{1,2}$ são reais e têm o mesmo sinal
  → $T > 0 \rightarrow$ nó instável
  → $T < 0 \rightarrow$ nó assintoticamente estável

- $\Delta > 0$ e $(T^2 - 4\Delta) < 0 \rightarrow \lambda_{1,2}$ são complexos conjugados
  → $T > 0 \rightarrow$ foco instável
  → $T < 0 \rightarrow$ foco estável
  → $T = 0 \rightarrow$ centro (estável em sistema linear)



Teorema das variedades hiperbólicas

Definições: Seja $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ onde $\vec{f}$ é um campo vetorial de classe r (r-vezes diferenciável) . ***P**** é um ponto de equilíbrio e ***J**** é a matriz jacobiana linearizada calculada em ***P****

Os autovalores de ***J**** são complexos. Classificamos os autovalores em 3 grupos:

- $\lambda \in \sigma_e$ se $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ $\rightarrow n_e$ é o número de autovalores $\lambda \in \sigma_e$
- $\lambda \in \sigma_i$ se $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ $\rightarrow n_i$ é o número de autovalores $\lambda \in \sigma_i$
- $\lambda \in \sigma_c$ se $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ $\rightarrow n_c$ é o número de autovalores $\lambda \in \sigma_c$

→ O subespaço gerado pelos autovetores $\lambda \in \sigma_e$ é o subespaço estável E^e

→ O subespaço gerado pelos autovetores $\lambda \in \sigma_i$ é o subespaço instável E^i

→ O subespaço gerado pelos autovetores $\lambda \in \sigma_c$ é o subespaço central E^c

$$\textit{Soluções} \in \begin{cases} E^e \rightarrow \text{decaimento exponencial} \\ E^i \rightarrow \text{crescimento exponencial} \\ E^c \rightarrow \text{estabilidade neutra} \end{cases}$$

Obs 1. $n_e + n_i + n_c = n$ é igual à dimensão do sistema
Obs 2. O Teorema de Hartman-Grobman só vale se $n_c=0$

Variedade Diferenciável

É toda solução real e contínua de um sistema não-linear. Seja um sistema dinâmico definido por n equações diferenciais autônomas. Um conjunto S de pontos do espaço de fases n-dimensional é uma variedade invariante local. Se para $\vec{x}_0 \in S$, a solução $\vec{x}(t)$ é tal que $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ está em S para $|t| < T$ com $T>0$. Se isso é válido, então para $T \to \infty$ então S é uma variedade invariante.

E^e, E^i e E^c são **variedades invariantes**

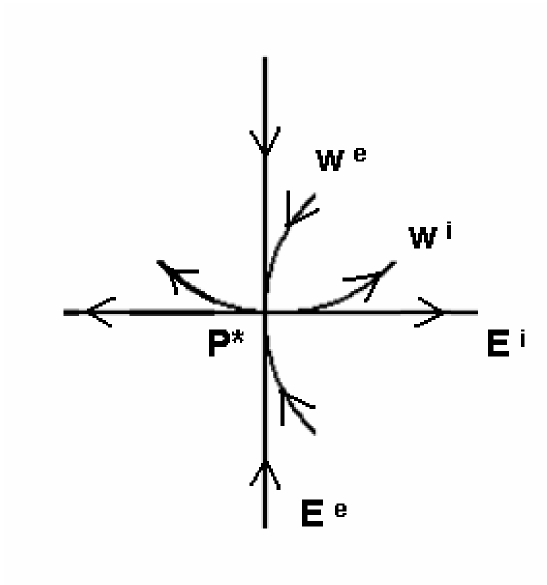
Em sistemas autônomos toda trajetória é um conjunto invariante. Uma variedade imersa em um espaço de fases de dimensão n ocupa uma região de dimensão ***no máximo*** igual a n-1.

Variedades diferenciáveis → em 2D são curvas 1D
→ em 3D são superfícies 2D
→ em 4D são volumes 3D
...
→ em n dimensões são hipervolumes (n-1)-dimensionais

Teorema das Variedades hiperbólicas

A. Kelley,1967

Existe uma única variedade estável w^e tangente em $P*$ ao subespaço E^e e esta variedade é de classe r. Existe uma única variedade instável w^e tangente em $P*$ ao subespaço E^e e esta variedade é também de classe r.



<u>Teorema de Hartman-Grobman + Teorema das variedades hiperbólicas</u>

Se P é um ponto de equilíbrio hiperbólico*

- *w^e e E^e se tangenciam em P**
- *w^i e E^i se tangenciam em P**

Na vizinhança deste ponto o sistema não-linear e a versão linearizada são topologicamente equivalentes

... e quando Re(λ)=0 ?

Teorema da variedade central

Seja $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ onde $\vec{f}$ é um campo vetorial de classe *r*. *P** é um ponto de equilíbrio e ***J**** é a matriz jacobiana linearizada calculada em *P** . Se existe um , entao existe uma variedade central w^c tangente ao subespaço E^c em *P** . Entretanto esta variedade é de classe *r-1* e não **necessariamente** única. Particularmente, se ***f*** é de classe infinita é possível encontrar uma variedade central de classe *r* para qualquer *r* finito.

Estabilidade de P* → Teoria da variedade central, teorema de Carr, etc...

Ciclos Limite

Teorema de Poincaré-Bendixon:

Seja D um domínio finito que não contém pontos estacionários e do qual trajetórias não partem. Então D contém um ciclo limite.

Critério de Bendixon:

Sejam,

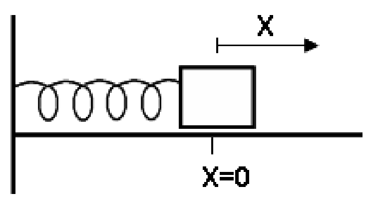
$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

Se $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ não é identicamente nula e não muda de sinal em um domínio D, então a equação diferencial não apresenta órbitas fechadas em D.

Exemplo: Sistema de Van der Pol

Considere um oscilador harmônico simples:



Se colocarmos um termo de atrito proporcional à velocidade:

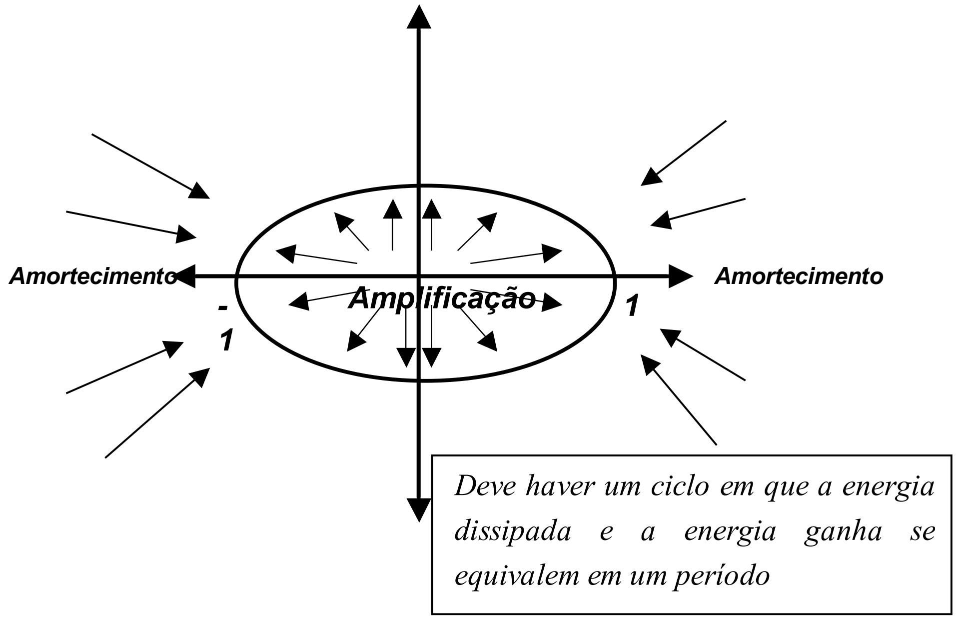
$$\ddot{x} = -x - b\dot{x} \rightarrow \ddot{x} + b\dot{x} + x = 0$$

Onde b é o coeficiente de atrito. Quando b<0 este termo tem o efeito de amplificação, ou seja, fornecimento de energia. Quando b>0 tem o efeito de amortecimento, ou dissipação de energia.

Van der Pol (1922)

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

$x^2>1 \rightarrow$ amortecimento $x^2<1 \rightarrow$ amplificação



Passando para variáveis de estado:

$$\dot{x} = f(x, y) = y$$

$$\dot{y} = g(x, y) = -\mu(x^2 - 1)y - x$$

Ponto de equilíbrio (0,0)=P*

A equação,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = -\mu(x^2 - 1)y$$

só se anula em x = ± 1.

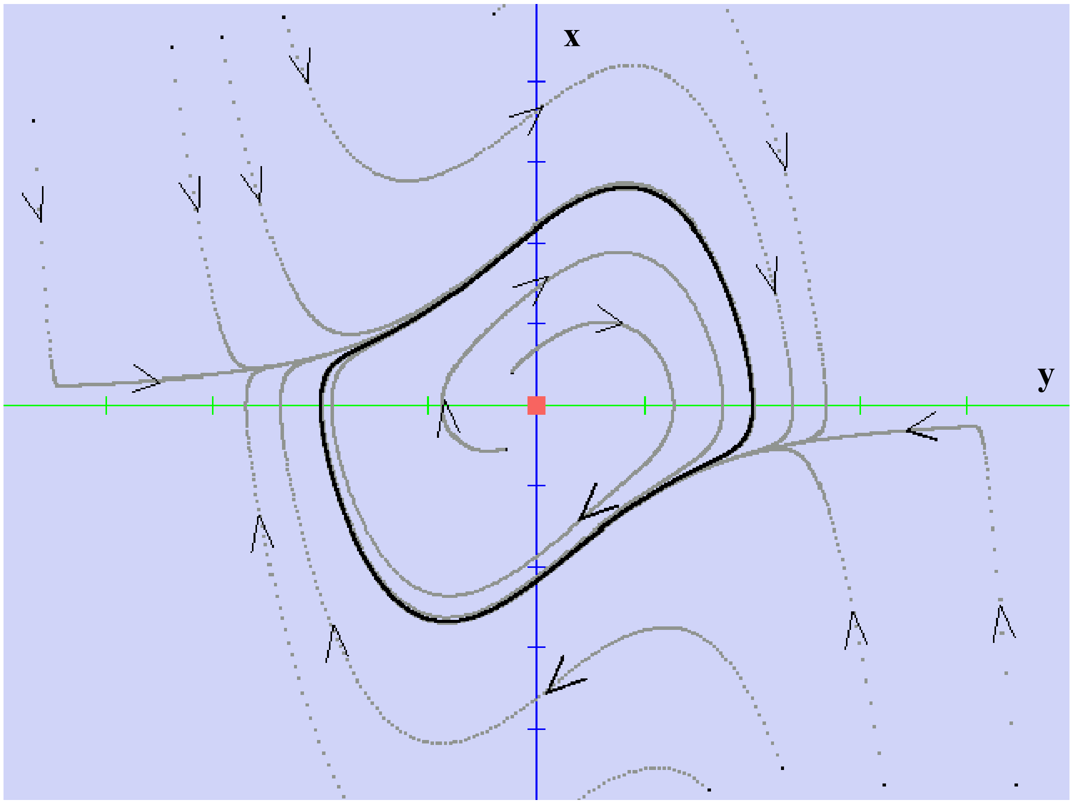
$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$$

$0<\mu<2$ → P* é um foco instável

$\mu>2$ → P* é um nó instável

$-2<\mu<0$ → P*é um foco assintoticamente estável

$\mu<-2$ → P* é um nó assintoticamente estável



Classificação de P* de acordo com o valor de μ