FGE417- Fenômenos Não-Lineares em Física:
Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos
Prof. Reynaldo Daniel Pinto

Notas de Aula - Parte 8

Bifurcação Homoclínica

Considere o sistema dinâmico

$$\ddot{x} = x - x^3 \tag{1}$$

1. **Quais as variáveis dinâmicas do sistema? Qual o espaço de fases ? Quantas dimensões ele tem?**

   Dimensão=número de e.d.o autônomas de primeira ordem

   $$\dot{x} = y \tag{2}$$
   $$\dot{y} = x - x^3 \tag{3}$$

   x e y são as variáveis dinâmicas deste sistema e o espaço de fases é o plano xy para $-\infty < x < \infty$ $-\infty < y < \infty$

2. **Mostre que o sistema (1) é hamiltoniano, ou seja, que existe uma função $H(x, y)$ tal que**

   $$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}$$
   $$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

   Encontre $H(x, y)$

   Da equação (2) temos que $\frac{dx}{dt} = y$, ou seja, $\frac{\partial H}{\partial y} = y$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = x - x^3 \longrightarrow -\frac{\partial H}{\partial x} = x - x^3$$

$$H(x, y) = H_x(x) + H_y(y)$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial x} = x - x^3$$

$$H_x(x) = \int (-x + x^3)\, dx \longrightarrow H_x(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} = y \longrightarrow H_y(y) = \int y\, dy \longrightarrow H_y(y) = \frac{y^2}{2}$$

$$H(x, y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$$

3. **Encontre os pontos fixos do sistema dinâmico e discuta sua estabilidade**

$$\dot{x} = 0 \longrightarrow y^* = 0$$
$$\dot{y} = 0 \longrightarrow x^*(1 - x^{*2} - x^*) = 0$$

Os pontos fixos do sistema são $(x^*, y^*) \longrightarrow (0, 0), (-1, 0), (1, 0)$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de J no ponto $(0, 0)$ são $\lambda = \pm 1 \longrightarrow (0, 0)$ é ponto de sela hiperbólico No ponto $(\pm 1, 0)$ os autovalores são $\lambda = \pm\sqrt{2}i \longrightarrow Re(\lambda) = 0$ é um ponto fixo elíptico(centro).

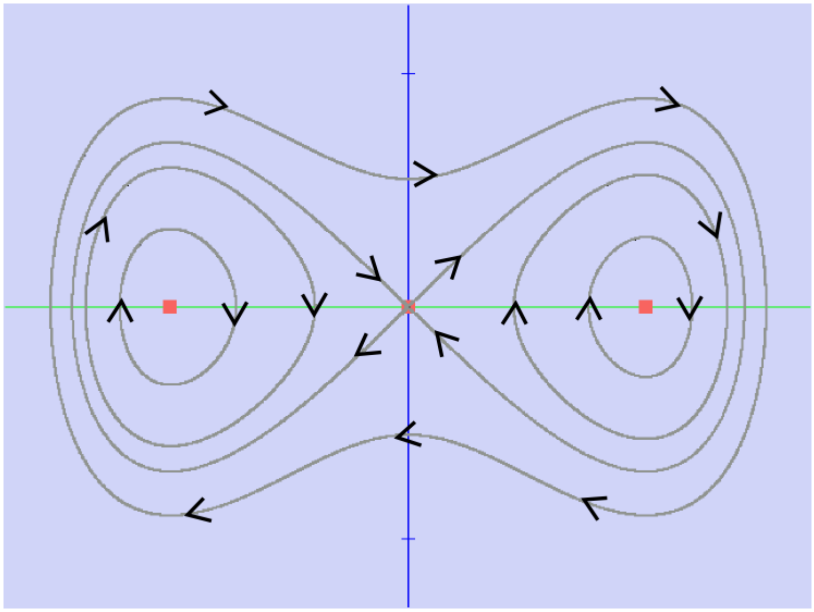

Figura 1: Retrato de fases do sistema dinâmico (1)

4. **Esboce o espaço de fases do sistema em função da constante E=H(x,y)**

   Encontrando os autovetores em (0,0):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \pm 1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \longrightarrow a = \pm b$$

   O autovetor associado a $\lambda = 1$ é $(1,1)$ indica a direção de afastamento e o autovetor associado a $\lambda = -1$ é $(1,-1)$ indica a direção de aproximação. Para hamiltoniana negativa,

$$H < 0 \longrightarrow \frac{y^2}{2} < \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

   as órbitas são *internas*. Para hamiltoniana positiva

$$H < 0 \longrightarrow \frac{y^2}{2} < \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

as órbitas são *externas*.

5. **As curvas $H(x,y) = constante$ descrevem as trajetórias percorridas pelo sistema no espaço de fases. Obtenha a trajetória que passa pelo ponto fixo (0,0)**

   Para que esta trajetória passe pelo ponto (0,0), o ponto deve satisfazer H(x,y),

$$H(0,0) = -\frac{0^2}{2} + \frac{0^4}{4} + \frac{0^2}{2} = 0$$

   Então H(x,y)=0 representa a trajetória que passa pelo ponto (0,0).

$$H(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} = 0$$

$$y^2 = x^2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \rightarrow y = \pm|x|\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$$

   Um ponto P é chamado de homoclínico se ele está em uma órbita que é ao mesmo tempo a variedade estável e instável de um ponto de sela. A órbita que passa pelo ponto (0,0) dada pela expressão acima é uma órbita homoclínica, ou seja, uma órbita composta de pontos homoclínicos.

Estabilidade estrutural

Considere uma perturbação no sistema dinâmico que faça com que a variedade estável e instável do ponto de sela não sejam mais coincidentes.

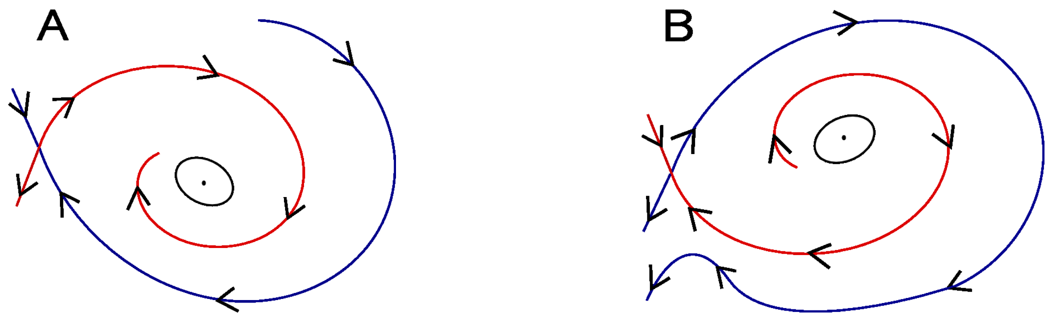

Figura 2:

(a) e (b) e o retrato de fases original **não** são topologicamente equivalentes, mas nenhum ponto fixo teve sua estabilidade alterada e nem apareceu/desapareceu outros pontos fixos no sistema. Nesse caso, não se trata de uma bifurcação local. Quando isso ocorre(destruição de uma órbita homoclínica) dizemos que ocorre uma **bifurcação homoclínica** que é uma **bifurcação global**, isso porque é necessário analisar o que acontece com as variedades não apenas nas vizinhanças dos pontos fixos).