FGE417- Fenômenos Não-Lineares em Física:
Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos
Prof. Reynaldo Daniel Pinto

Notas de Aula - Parte 9

Seção de Poincaré

Considere o sistema dinâmico autônomo:

$$\dot{x} = f_\mu(x, y, z)$$
$$\dot{y} = g_\mu(x, y, z)$$
$$\dot{z} = h_\mu(x, y, z)$$

Supondo que o sistema apresenta como atrator um toro T^2 para algum valor do parâmetro de controle μ o retrato de fases do sistema é apresentado na figura 1A

Cada vez que o fluxo cruza o plano z=0, com $\dot{z} < 0$, marcamos um ponto (figura 1B)

Podemos encontrar funções F_μ e G_μ tais que

$$x_{n+1} = F_\mu(x_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = G_\mu(x_n, y_n)$$

Se o fluxo ϕ_t é liso (classe C^r) então F e G definem um mapa liso com uma inversa lisa, ou seja, um difeomorfismo.

A órbita do mapa é a sequência de pontos (x_i, y_i) definida por F e G a partir das condições iniciais (x_0, y_0), em geral, para n dimensões

$$\vec{x}_{i+1} = F_\mu(\vec{x}_i)$$

Os mapas também são chamados de equações de diferenças

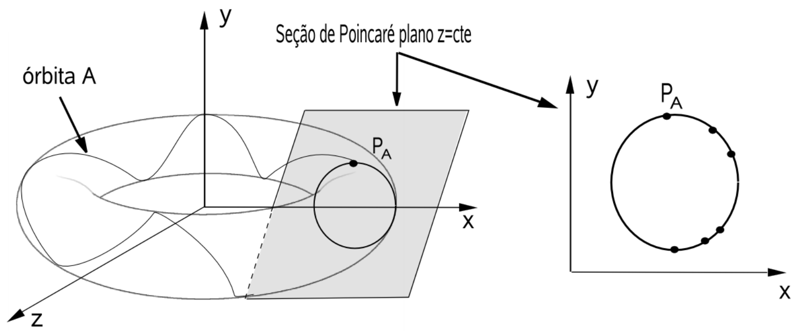

Figura 1: Seção de Poincaré

Mapas podem ser obtidos da seção de Poincaré de sistemas contínuos (fluxos) ou de sistemas naturalmente discretos

Exemplo 1: *Seções de Poincaré consecutivas*

Seja um toro T^2 com frequências incomensuráveis. Se tomarmos a seção de Poincaré (plano) obtemos um ciclo limite (2D) , se novamente tomarmos uma seção de Poincaré do ciclo limite (reta) obtemos um ponto fixo (1D) (Figura 2).

Exemplo 2: *Mapa logístico*

No modelo de dinâmica populacional de Malthus o número de indivíduos N é descrito pela relação

$$\frac{dN}{dt} \simeq rN$$

o que é pouco realista uma vez que $N \to \infty$ quando $t \to \infty$. *Velhust* (1838) propõe um modelo melhor o qual considera que o alimento e o espaço físico ocupado pela espécie são finitos

$$F(N) = \frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{1}$$

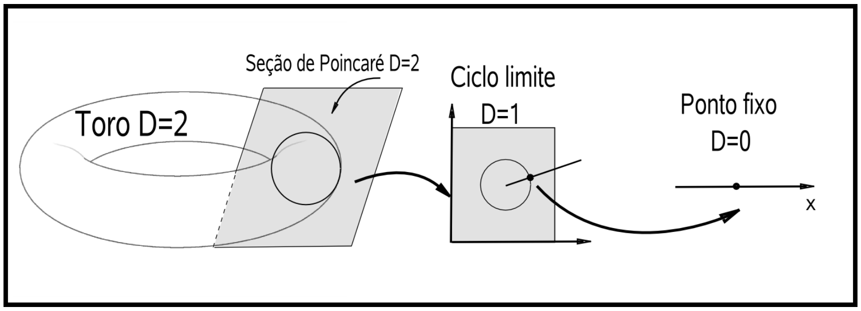

Figura 2: Seções de poincaré consecuticas do Toro T^2

F(N) é a função logística de Velhust. A forma integrada da equação acima é

$$N(t) = \frac{N_0\, K\, e^{rt}}{N + N_0(e^{rt} - 1)}$$

em que $\lim_{t\to\infty} N(t) = K$ é o numero máximo de indivíduos. Fazendo a tranformação

$$x(t) = \frac{N(t)}{K}$$

temos que

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)(1 - x(t))$$

Podemos ainda discretizar e simplificar a equação acima. Tomando Δt fixo (de 1 ano por exemplo) obtemos a equação do *mapa logístico*

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \tag{2}$$

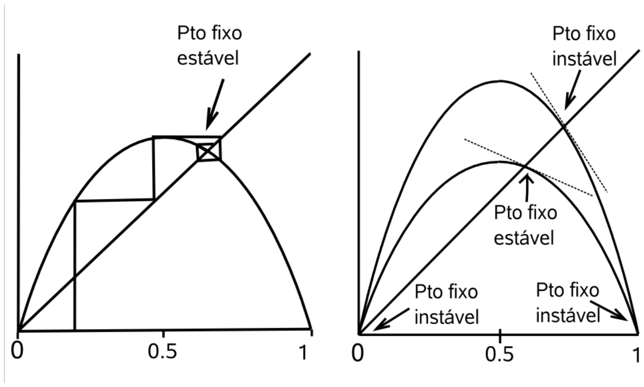

Figura 3: Mapa logístico

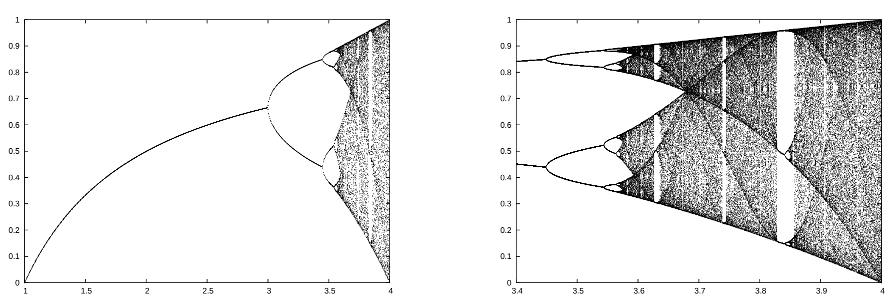

Figura 4: Diagrama de bifurcação do mapa logístico à esquerda e sua ampliação para o intervalo $3.4 < \mu < 4$ à direita.