

Notas de Aula - Parte 10

Pontos fixos Estabilidade e Bifurcações em Mapas

Considere o mapa unidimensional

$$x_{i+1} = F(x_i)$$

em que F é um mapa linear, x^* é um ponto fixo de F se

$$x^* = F(x^*)$$

Estabilidade

A vizinhança de x^* são pontos tais que

$$x_i = x^* + \varepsilon_i$$

para ε_i bem pequeno.

$$x_{i+1} = F(x_i) = F(x^* + \varepsilon_i) = x^* + \varepsilon_{i+1}$$

- Se x_{i+1} afasta-se de x^* , então x^* é instável
- Se x_{i+1} aproxima-se de x^* , então x^* é assintoticamente estável
- Se $x_{i+1} = x_i$, então x^* é apenas estável

Expandindo-se F em série de Taylor em torno de x_* temos

$$x^* + \varepsilon_{i+1} = F(x^* + \varepsilon_i) = F(x^*) + \frac{dF}{dx} \Big|_{x=x^*} \varepsilon_i + \frac{1}{2} \frac{d^2F}{dx^2} \Big|_{x=x^*} \varepsilon_i^2 + \dots$$

Mas como $x^* = F(x^*)$ e desconsiderando-se termos de ordem maior ou igual a 2,

$$\varepsilon_{i+1} = \alpha \varepsilon_i \longrightarrow \alpha = \frac{dF}{dx} \Big|_{x=x^*}$$

Podemos classificar o ponto fixo quanto a sua estabilidade olhando para o valor de α :

- Quando $-1 < \alpha < 1$ então $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i$ ou seja, o ponto fixo tem *estabilidade assintótica*. A órbita pode se aproximar do ponto fixo de duas maneiras.
 - Se $0 < \alpha < 1$, ε diminui monotonicamente (figura 1a).
 - Se $-1 < \alpha < 0$, ε diminui em módulo mas oscila em torno do ponto fixo, chamado de processo de aproximação *flip* (figura 1b).
- Quando $|\alpha| > 1$ as iteradas afastam-se de x^* . O ponto fixo, portanto é *instável*.
- Quando $\alpha = 1$ a série de Taylor é exata para o mapa linear, então x^* é um *centro*. No caso de um mapa não linear é necessário considerar termos de ordem superior.
- Quando $\alpha = -1$ representa um estado *"flip incipiente"*

Órbitas periódicas em mapas

Uma órbita de período 2 é representada por x^* se

$$x^* = F(F(x^*)) = F^2(x^*)$$

Generalizando para uma órbita de período n

$$x^* = F^n(x^*)$$

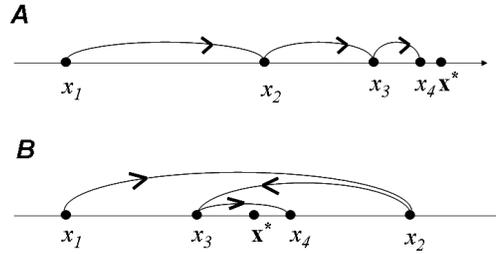


Figura 1: Em **A** x^* é um ponto fixo estável. Em **B** é um ponto fixo estável do tipo flip

Mapas bidimensionais

Considere o mapa bidimensional dado por

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= G(x_i, y_i) \end{aligned}$$

O ponto (x^*, y^*) é um ponto fixo se

$$\begin{aligned} x^* &= F(x^*, y^*) \\ y^* &= G(x^*, y^*) \end{aligned}$$

Analogamente ao caso unidimensional vamos expandir o mapa em série de Taylor em torno do ponto fixo considerando uma vizinhança $(x^* + \varepsilon_i, y^* + \eta_i)$. Desprezando termos de ordem superior temos que:

$$\varepsilon_{i+1} = \frac{dF}{dx} \Big|_{(x,y)=(x^*,y^*)} \varepsilon_i + \frac{dF}{dy} \Big|_{(x,y)=(x^*,y^*)} \eta_i + \dots$$

$$\eta_{i+1} = \frac{dG}{dx} \Big|_{(x,y)=(x^*,y^*)} \varepsilon_i + \frac{dG}{dy} \Big|_{(x,y)=(x^*,y^*)} \eta_i = \dots$$

$$\vec{\varepsilon}_{i+1} = J^* \vec{\varepsilon}_i \quad , \quad \vec{\varepsilon}_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ \eta_i \end{pmatrix}$$

$$J^* = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big|_{(x^*, y^*)}$$

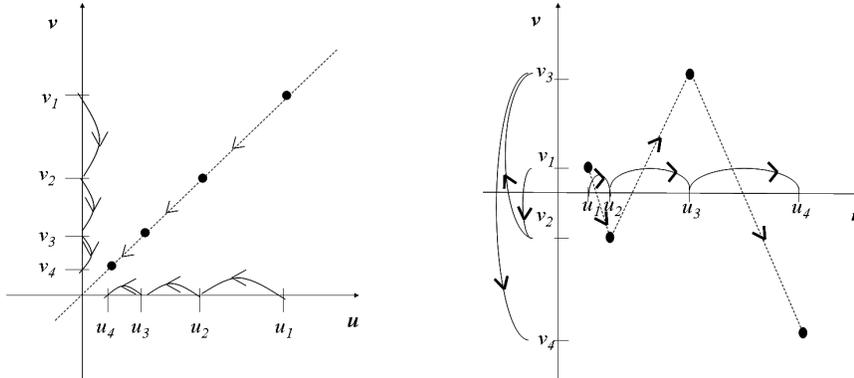


Figura 2: Em **A** x^* é um ponto fixo estável com autovalores reais $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$ e $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.
 Em **B** x^* é um ponto fixo instável do tipo flip com autovalores reais $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$, $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$

A estabilidade de (x^*, y^*) depende dos autovalores λ_1 e λ_2 de J^* que podem ser reais ou imaginários. Se λ_1, λ_2 são reais existe uma transformação de coordenadas inversível tal que

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= \lambda_1 u_i \\ v_{i+1} &= \lambda_2 v_i \end{aligned} \quad (1)$$

em que u e v correspondem às direções dos autovalores de J^* . As variedades u e v não são em geral ortogonais.

As figuras 2 A e B apresentam exemplos de um ponto fixo estável e um instável do tipo flip, respectivamente. A figura 3 mostra e um ponto de sela.

No caso em que os autovalores são complexos $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$ a transformação de coordenadas (1) não é possível e devemos reescrever o mapa como

$$\begin{pmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$$

Usando os complexos

$$\begin{aligned} z_i &= u_i + i v_i = r_i \exp(i\theta_i) \\ z_{i+1} &= u_{i+1} + i v_{i+1} = r_{i+1} \exp(i\theta_{i+1}) \end{aligned}$$

podemos reescrever o mapa como

$$z_{i+1} = \lambda_1 z_i \quad (2)$$

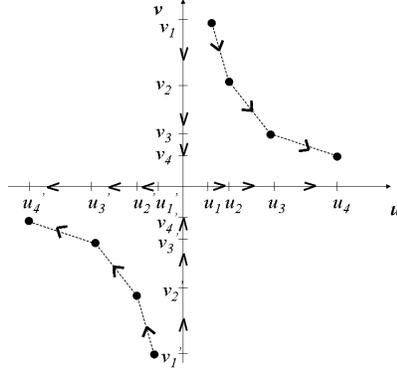


Figura 3: x^* é um ponto de sela com autovalores reais. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| < 1$

Mas como

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta$$

$$\lambda_1 = |\lambda_1| \exp \left\{ i \arctan \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \right\}$$

$$|\lambda_1| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

podemos reescrever (2)

$$z_i = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} r_i \exp \left\{ i \left(\theta_i + \arctan \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \right) \right\}$$

$$r_{i+1} = |\alpha_1| r_i$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \arctan \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)$$

Ou seja, o módulo de λ_i determina se r_{i+1} é maior ou menor que r_i (figura).

- $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1 \longrightarrow$ convergência para o ponto fixo. *Foco estável*
- $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1 \longrightarrow$ divergência do ponto fixo. *Foco instável*
- $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ no caso do mapa linear é um *centro estável*. Para um mapa não linear é necessário olhar termos de ordem mais alta na expansão. Considerando um centro estável

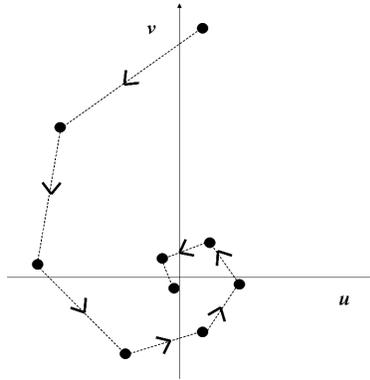


Figura 4: x^* é um foco estável com autovalores imaginários. $\lambda_1 = \lambda_2^*$ e $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$

- Se $\frac{\theta}{2\pi}$ é um número racional, a órbita descrita é periódica.
- Se $\frac{\theta}{2\pi}$ é irracional, as sucessivas iteradas descrevem um círculo completo em torno do ponto fixo.