FGE417- Fenômenos Não-Lineares em Física:
Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos Prof. Reynaldo Daniel Pinto

Notas de Aula - Parte 11

Pontos Fixos, Estabilidade e Bifurcações em Mapas (continuação)

Considere o mapa bidimensional

$$x^* = F(x^*, y^*)$$
$$y^* = G(x^*, y^*)$$

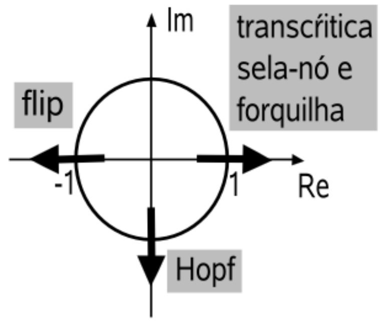
Em que (x^*, y^*) é um ponto fixo. A matriz jacobiana avaliada no ponto fixo é chamada *matriz de Floquet.*

$$M = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$$

Os multiplicadores de Floquet, que são autovalores λ da matriz M, determinam a estabilidade dos pontos fixos (veja figura 4 das notas de aula **parte 9**) Um sistema de n dimensões possui n multiplicadores de Floquet.

Um ponto fixo estável, que têm todos os autovalores com módulo menor que 1, perde sua estabilidade quando qualquer um dos multiplicadores de Floquet passa a ter módulo **maior** que 1, nesse caso o sistema sofre uma bifurcação. Diferentes tipos de bifurcação podem ocorrer, dependendo de como os autovalores cruzam o círculo unitário.

- *sela-nó*: 1 par de pontos fixos com estabilidade oposta é criado.($\lambda = 1$)



- *transcrítica*: troca de estabilidade entre dois pontos fixos que já existiam ($\lambda = 1$)
- *forquilha*: um par de pontod fixos com estabilidae aparece e desaparece ($\lambda = 1$)
- *Hopf*: um foco estável se torna um foco instável ($Im(\lambda) \neq 0$)
- *flip*: alternância ($\lambda = -1$)

Exemplo

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= -\frac{1}{2}x_n + \mu y_n - y_n^3 \end{aligned}$$

Os pontos fixos são

$$\begin{aligned} x^* &= y^* \\ y^* &= -\frac{1}{2}x^* + \mu y^* - y^{*3} \\ x^* &= -\frac{1}{2}x^* + \mu x^* - x^{*3} \\ x^{*3} + x^*\left(\frac{3}{2} - \mu\right) &= 0 \longrightarrow x^* = 0 \quad ou \quad x^* = \pm\sqrt{\mu - \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Vamos calcular os autovalores da matriz de Floquet para analizar as estabilidade dos pontos fixos.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \mu - 3y^2 \end{bmatrix}$$

Os autovalores da matriz M são

$$\lambda(\mu - 3y^2 - \lambda) + \frac{1}{2} = 0$$

$$\lambda = \frac{\mu - 3y^2 \pm \sqrt{(3y^2 - \mu)^2 - 2}}{2}$$

Para $\mu = \frac{3}{2}$ $y = x = 0$ $\lambda_1 = 1$ (bifurcação) e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Quando $\mu > \frac{3}{2}$, por exemplo $\mu = 2$

$$\lambda_{1,2}(x^* = 0) = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lambda_1 = 1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2} > 1 \longrightarrow \text{instável } 0 < \lambda_2 = 1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2} > 1 \longrightarrow \text{estável}$$

Então para $\mu = 2$, $x^* = 0$ é um ponto de sela instável. Para $\mu = 1$

$$\lambda_{1,2}(x^* = 0) = \frac{1}{2}(1 \pm i)$$

$$|\lambda_{1,2}| = \tfrac{\sqrt{2}}{2} < 1 \longrightarrow \text{foco estável}$$

Então o ponto fixo passa de foco estável a sela instável quando μ passa a ser maior que $\frac{3}{2}$. Para os pontos fixos $x^* = \pm\sqrt{\mu - \frac{3}{2}}$ em $\mu = 2$ (os autovalores são iguais para esses dois pontos)

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{4} \pm i\tfrac{\sqrt{7}}{4} \rightarrow |\lambda_{1,2}| = \tfrac{\sqrt{2}}{2} < 1 \longrightarrow \text{foco estável}$$

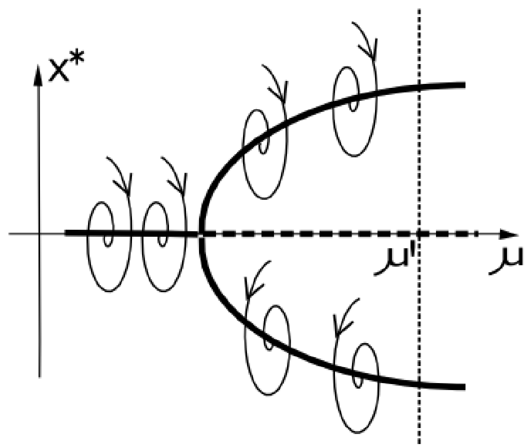


Figura 1: Diagrama de bifurcação para $y = 0$

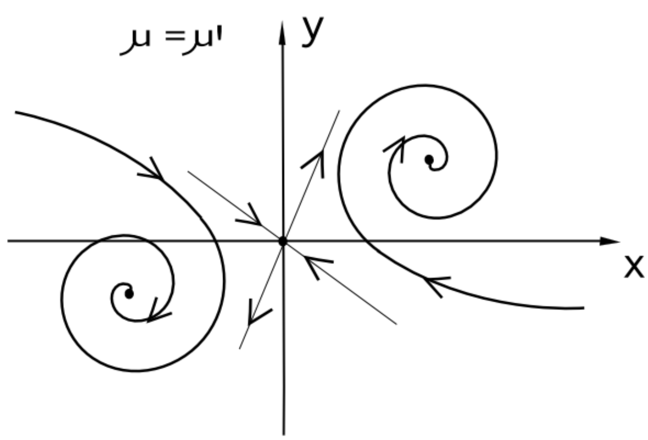


Figura 2: retrato de fases do sistema para $\mu = \mu'$