FGE417- Fenômenos Não-Lineares em Física:
Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos Prof. Reynaldo Daniel Pinto

Notas de Aula - Parte 12

Atratores

Um conjunto fechado de pontos A, no espaço de fases de um sistema dinâmico é definido como atrator se

- A é um conjunto invariante: qualquer trajetória que começa em A permanece em A por todo o tempo
- A atrai um conjunto aberto de condições iniciais. Há um hipervolume B que contém A tal que para qualquer condição inicial $\vec{x}(0) \in B$ a distância entre $\vec{x}(t)$ e A tende a zero quando $t \to \infty$. O maior conjunto de condições iniciais que satisfaz essa propriedade é chamado de *bacia de atração*
- A é um mínimo: não há um subconjunto de A que satisfaça as duas condições anteriores.

Expoentes de Lyapunov

Seja um sistema de n equações diferenciais ordinárias. onsidere uma hiper-esfera de condições iniciais centrada num ponto $\vec{x}(t_0)$ Conforme o tempo passa esse volume se deforma.

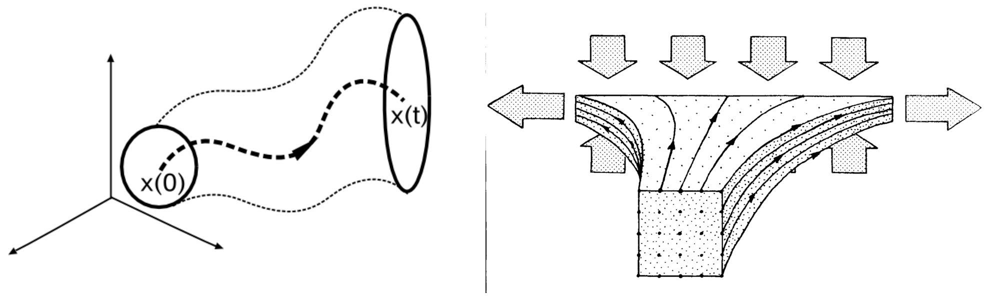

Figura 1: Deformação de um hipervolume no espaço de fases (*esq.*) e direções de "compressão e estiramento"de um fluxo em 3 dimensões(*dir.*)

Assuma que para cada uma das n dimensões o raio inicial $d_j(t_0)$ tenha variado exponencialmente com o tempo de maneira que a relação entre $d_j(t_0)$ e o valor correspondente no instante t seja dado por

$$d_j(t) = d_j(t_0)\exp\{\Lambda_j(t-t_0)\} \qquad ; j = 1, 2 \ldots n$$

$$\Lambda_j = \frac{\ln \frac{d_j(t)}{d_j(t_0)}}{t-t_0}$$

Os numeros Λ_j são chamados de *expoentes de Lyapunov*

Em $t > t_0$ o volume $V(t)$ da hiperesfera deve ser proporcional ao produto das distâncias $d_j(t)$ que o caracterizam, isto é:

$$V(t) \;\propto\; \prod_{j=1}^{n} d_j(t) \;\propto\; V(t_0)\exp\left\{(t-t_0)\sum_{j=1}^{n}\Lambda_j\right\}$$

onde $V(t_0)$ é o volume da hiperesfera no instante inicial t_0. Se o sistema é **conservativo**, $V(t) = V(t_0)$

$$\sum_{j=1}^{n}\Lambda_j = 0$$

Se o sistema é **dissipativo** $V(t) < V(t_0)$

$$\sum_{j=1}^{n}\Lambda_j < 0$$

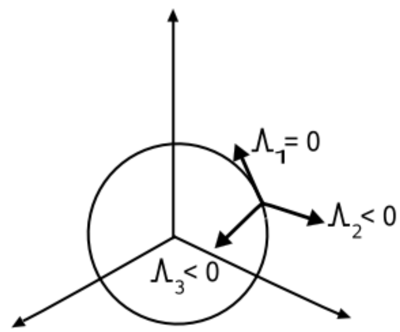

Figura 2: Expoentes de Lyapunov associados a um ciclo limite

Sobre uma solução periódica, a distância entre duas soluções inicialmente vizinhas se mantém constante na média, de modo que o expoente de Lyapunov associado a essa dimensão é nulo. Nas direções perpendiculares ao atrator periódico há contração de volume no espaço de fases e os expoentes de Lyapunov associados a essas dimensões são negativos.

Fluxos

Para n=3:

- **ponto fixo estável** $\longrightarrow \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 < 0$
- **ciclo limite** $\longrightarrow \Lambda_1, \Lambda_2 < 0$ e $\Lambda_1 = 0$
- **Toro** $T^2 \longrightarrow \Lambda_1 < 0$ e $\Lambda_2, \Lambda_3 = 0$

Atrator caótico

Caracterizado pela divergência exponencial de trajetórias vizinhas. Pelo menos um dos expoentes de Lyapunov deve ser positivo $\Lambda_1 > 0$ e a órbita ao longo do atrator tem expoente nulo $\Lambda_2 = 0$ de modo que deve haver pelo menos um expoente menor que zero para que $\sum \Lambda_j < 0$

Só é possível existir atrator caótico para dimensão $n \geq 3$