FGE417- Fenômenos Não-Lineares em Física:
Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos Prof. Reynaldo Daniel Pinto

Notas de Aula - Parte 13

Atrator de lorenz, sensibilidade as condições iniciais e Caos

Considere o sistema dinâmico que produz o atrator de Lorenz

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= \dot{x} = -10x + 10y && (1)\\
G(x,y,z) &= \dot{y} = -xz + 28x - y && (2)\\
H(x,y,z) &= \dot{z} = xy - \frac{8}{3}z && (3)
\end{aligned}
$$

O ponto $P_1 = (0,0,0)$ é um ponto fixo. Existem ainda 2 outros pontos fixos. De (1) temos que $x = y$, substituindo em (2) obtemos

$$z = 27$$

Agora, da equação (3) segue que

$$x = \pm\sqrt{72}$$

Esse sistema tem portanto três pontos fixos $P_1 = (0,0,0),\ P_2 = (\sqrt{72}, \sqrt{72}, 27),\ P_3 = (-\sqrt{72}, -\sqrt{72}, 27)$.

Agora vamos encontrar a estabilidade desses pontos através da matriz jacobiana

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 - z & -1 & -x \\ y & x & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Para P_1 temos que

$$\det(\mathbf{J}|_{P_1} - \lambda\mathbf{1}) = \begin{vmatrix} -10-\lambda & 10 & 0 \\ 28 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Então

$$\lambda_1 = -\frac{8}{3}\ ,\ \lambda_{2,3} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 + 4.270}}{2}$$

O ponto $P_1 = (0,0,0)$ é um ponto de sela 3D com autovalores $\lambda_1 = -\frac{8}{3}$ (aproximação), $\lambda_2 \sim 11.8$ (afastamento), e $\lambda_2 \sim -22.8$ (aproximação).

Para os pontos P_2 e P_3

$$\det(\mathbf{J}|_{P_2,P_3} - \lambda\mathbf{1}) = \begin{vmatrix} -10-\lambda & 10 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & \mp\sqrt{72} \\ \pm\sqrt{72} & \pm\sqrt{72} & -\frac{8}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo esta equação obtemos que

- $\lambda_1 < 0$ indica a direção estável. O autovalor grande em módulo indica convergência rápida ($|\lambda_1| \sim 30$)
- $\lambda_2 = \lambda_3^*$; $\mathrm{Re}(\lambda_2) = \mathrm{Re}\lambda_3 > 0$ é um foco instável. Autovalores pequenos em módulo (~ 2.5) indicam divergência lenta.

Todos os pontos fixos do sistema são instáveis.

Os expoentes de Lyapunov seste sistema são

$$\Lambda_1 = 0.905\ ,\ \Lambda_2 = 0.0\ ,\ \Lambda_3 = -14,57$$

cuja soma é negativa indicando que o sistema é dissipativo.

Dimensão de Lyapunov

A conjectura de Kaplan-Yorke

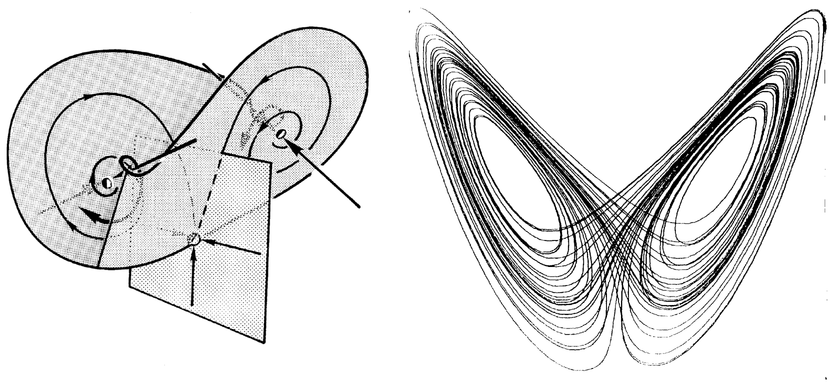

Figura 1: Atrator de Lorenz: o gráfico à esquerda mostra as trajetóras para diversas condições iniciais diferentes e à direita esquema mostra os pontos fixos (2 focos instáveis e uma sela 3D).

Considere um sistema dinâmico em $\Re^m$ e uma órbita com expoentes de Lyapunov $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3 \; ... \; \geq \Lambda_m$. Seja p o maior inteiro tal que

$$\sum_{i=1}^{p} \Lambda_i \geq 0 \tag{4}$$

A dimensão de Lyapunov que esta órbita ocupa é:

- $D_L = 0$ se não existe p que satisfaça (4)
- se $p < m$
$$D_L = p + \frac{1}{|\Lambda_{p+1}|} \sum_{i=1}^{p} \Lambda_i$$
- $D_L = m$ se $p = m$

Exemplo *Atrator de Lorenz*

$$\Lambda = (0.905, 0, -14.57)$$

$$D_L = 2 + \frac{1}{-14,57}.(0.905 + 0) = 2.062$$

O atrator de Lorenz tem dimensão ligeiramente maior que 2.