FGE417- Fenômenos Não-Lineares em Física:
Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos
Prof. Reynaldo Daniel Pinto

Notas de Aula - Parte 16

Emaranhados Homoclínicos e Dimensões de um Atrator

Além dos quatro tipos de conexões transversais heteroclínicas entre as variedades de pontos de sela 3D, existe um outro tipo de conexão entre variedades em 3D. É a conexão entre a variedade instável de um ciclo-sela com a variedade estável deste mesmo ciclo-sela, neste caso chamada de conexão homoclínica. Analogamente com o que ocorre para trajetórias heteroclínicas a próxima vez que o fluxo cruzar a seção de Poincaré o fará em um novo ponto homoclínico H^+. A conexão entre os pontos homoclínicos também deve levar em conta que as variedades são contínuas. O mesmo acontece se olharmos para o passado do ponto H, em H^-, H^{--}...(figura 1)

Assim, o comportamento das trajetórias é uma aproximação assintótica na direção da variedade estável não emaranhada, seguida de um período de movimento caótico dentro do emaranhado, finalmente escapando na direção da variedade instável não emaranhada. O emaranhamento homoclínico é um modelo para o Caos transiente.

Dimensões de um atrator.

A dimensão de um conjunto de pontos é o número mínimo de coordenadas necessárias para localizar cada ponto do conjunto. Uma curva é unidimensional porque cada ponto é determinado por um único número que é o comprimento do arco medido a partir de algum ponto de referência fixo

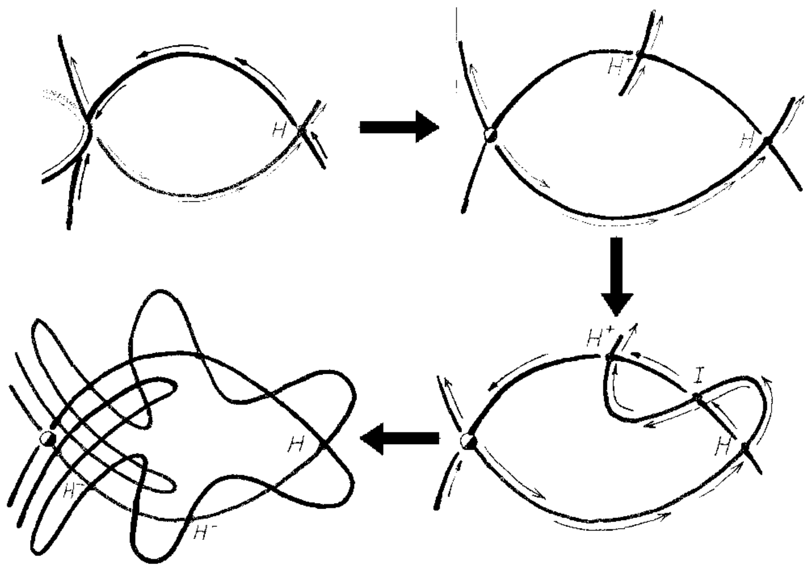

Figura 1:

nesta curva. Seja um conjunto de pontos A num espaço de fase de dimensão n. Esse conjunto de pontos pode ser coberto por hipercubos iguais de lado ϵ

A idéia de dimensão pode ser ilustrada como

$$1D \quad \longrightarrow N(\epsilon) = c\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

$$2D \quad \longrightarrow N(\epsilon) = c\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^2$$

$$1D \quad \longrightarrow N(\epsilon) = c\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^3$$

$$dim \;\; d \quad \longrightarrow N(\epsilon) = c\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^d$$

que sugere uma lei de escala

$$\log N(\epsilon) = \log C + d \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$$

$$\frac{\log N(\epsilon)}{\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} = \frac{\log C}{\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} + d$$

Se $\epsilon \longrightarrow 0$, $\log\frac{1}{\epsilon} \rightarrow \infty$

Kolmogorov definiu dimensão de contagem de caixas D_0 como:

$$D_0 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}$$

onde $N(\epsilon)$ é o número mínimo de hipercubos idênticos de lado ϵ necessário para cobrir todo o conjunto de pontos A. D_0 também é conhecido como dimensão de capacidade.

Exemplo 1

Calcule a dimensão de um segmento de reta de comprimento L.

- **n=0**: 1 segmento de comprimento $L \longrightarrow N(\epsilon) = 1$, $\epsilon = L$
- **n=1**: 2 segmento de comprimento $\frac{L}{2} \longrightarrow N(\epsilon) = 2$, $\epsilon = \frac{L}{2}$
- **n=2**: 4 segmento de comprimento $\frac{L}{4} \longrightarrow N(\epsilon) = 4$, $\epsilon = \frac{L}{4}$
- **n**: 2^n segmentos de comprimento $\frac{L}{2^n} \longrightarrow N(\epsilon) = 4$, $\epsilon = \frac{L}{2^n}$

$$D_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{\log 2^n}{\log \frac{2^n}{L}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log 2^n}{\log 2^n - \log L} = 1$$

Exemplo 2 Dimensão de um quadrado de área L^2

- 1 caixa de lado L
- q^2 caixas de lado $\frac{L}{q}$
- q^4 caixas de lado $\frac{L}{q^2}$
- q^{2n} caixas de lado $\frac{L}{q^n}$

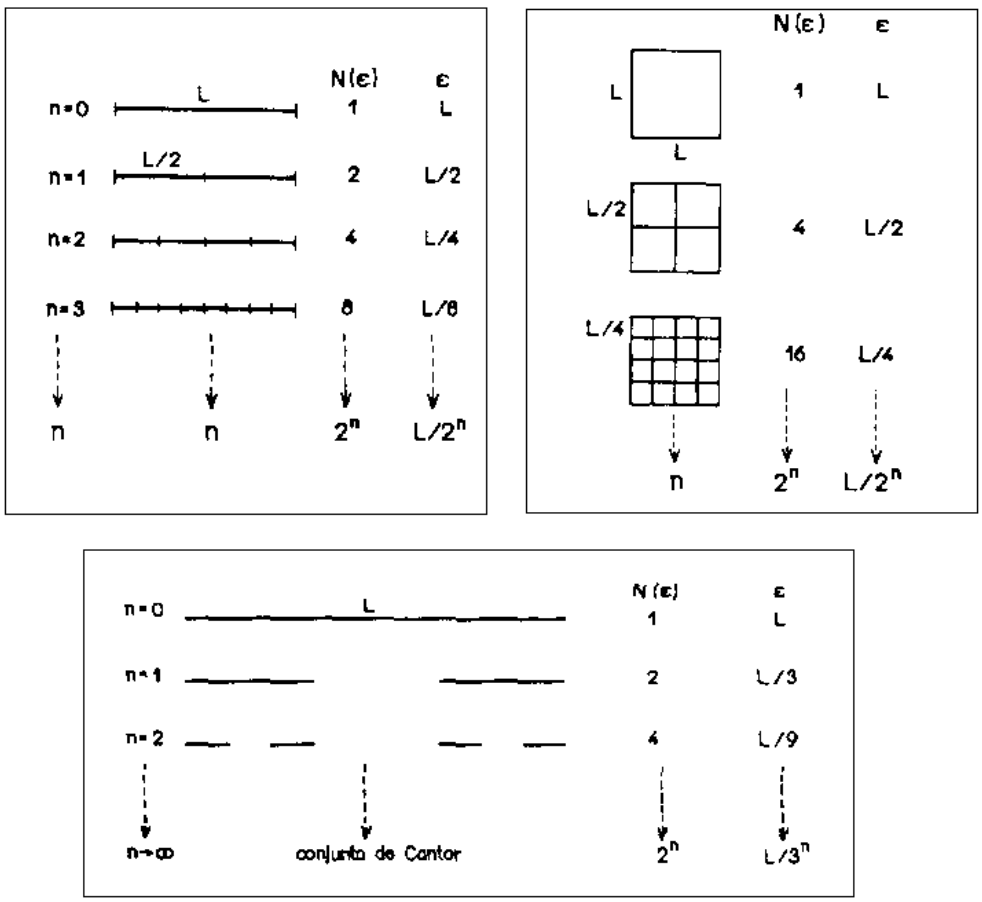
N(ε)
ε
n=0
L
1
L
n=1
L/2
2
L/2
n=2
4
L/4
n=3
8
L/8
n
n
2^n
L/2^n
N(ε)
ε
L
L
1
L
L/2
4
L/2
L/4
16
L/4
n
2^n
L/2^n
N(ε)
ε
n=0
L
1
L
n=1
2
L/3
n=2
4
L/9
n→∞
conjunto de Cantor
2^n
L/3^n

Figura 2:

$$D_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\log q^{2n}}{\log \frac{q^n}{L}} = 2$$

Exemplo 3: Conjunto de Cantor (figura 2)

$$D_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 2^n}{\log \frac{3^n}{L}} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63$$

Conjuntos de pontos com dimensão não inteira são chamados de fractais, Conjuntos fractais têm a propriedade de não simplificar a complexidade de sua estrutura quando amplificados. O que fractais têm a ver com Caos? Se o fractal é gerado a partir de uma regra do tipo Cantor, NADA.

No inicio do século passado já se conhecia tais conjuntos. A surpresa foi a descoberta que fractais podem ser gerados pelo comportamento assintótico de um sistema dinâmico como por exemplo no atrator de Rössler, atrator de Lorenz ... Nesses casos a dimensão fractal D_0 pode ser usada para caracterizar o atrator. Cuidado: a presença de Caos implica em um atrator de dimensão fractal, porém a um sistema de dimensão fractal não implica em Caos.

Atratores que possuem dimensão fractal são chamados de atratores estranhos. Todo atrator caótico é estranho, mas o inverso não é verdadeiro.

Exemplo 4: 2D esponja de Sierpinski

$$D_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 3^n}{\log \frac{2^n}{L}} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58$$

Uso da dimensão para caracterizar atratores

Não Caóticos: Um ponto fixo assintoticamente estável (sorvedouro) tem dimensão D_0=0, um ciclo limite tem D_0=1 e um toro T2 tem D_0=2

Caóticos:Por exemplo, o atrator de Lorenz para os parâmetros $s = 10, b = 8/3, r = 28$ tem dimensão de contagem de caixas D_0= 2,06 (Kaplan-Yorke D_L=2,062)

Algoritmos numéricos para contagem de caixas:

- itera-se (mapas) ou integra-se (fluxos) o sistema "muitas" vezes despreza-se o transiente e assinala-se no espaço de fases os pontos que pertencem ao atrator.

- divide-se a região do espaço de fases ocupada pelo atrator em caixas de dimensão ϵ(grid)

- Conta-se quantas caixas contém pelo menos um ponto perto de atrator $N(\epsilon)$

- Refaz-se os cálculos para outros valores de D_0 correspondo a inclinação média do gráfico de $\log(N(\epsilon)) \times \log(1/\epsilon)$.

A dimensão de contagem de caixas é um caso especial da dimensão de Hausdorff,(D_H proposta em 1918). Para obter D_H é necessário encontrar o conjunto de hiper-cubos de lado ϵ_j com $\epsilon_j \leq \epsilon$ que cubra o hiper-volume ocupado pelo atrator de modo que o número de hiper-cubos utilizados seja mínimo.

Na prática é quase impossível determinar o valor de D_H para um atrator estranho porque existem infinitas maneiras de cobri-lo e precisamos encontrar a maneira ótima. Mas $D_H \leq D_0$ Tanto D0 quanto DH são indistintamente chamadas de *dimensões fractais*.

Muitos atratores estranhos não são homogêneos, algumas de suas regiões são mais visitadas que outras. Existem métodos para o cálculo de dimensões que levam isso em conta.

Em 1957, J. Belatoni e A. Reny propuseram uma generalização do conceito de dimensão baseado na freqüência relativa Fj com que cada caixa j é visitada. A freqüência é definida como

$$f_i = \lim_{N\to\infty} \frac{N_j}{N}$$

Onde N é o numero total de pontos do atrator e N_j é o número de pontos na caixa j.

$$D_1 = -\lim_{\epsilon\to 0} \sum_{j=1}^{N(\epsilon)} \frac{f_j \log f_j}{\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}$$

D_1 é a dimensão de informação.

$$D_2 = \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{j=1}^{N(\epsilon)} \frac{f_j^2}{\log \epsilon}$$

D_2 é a dimensão de correlação. É frequência com que 2 pontos caem na j-ésima caixa de tamanho ϵ.

Pode-se mostrar que $D_2 \leq D_1 \leq D_0$. Se o atrator é homogêneo $D2 = D1 = D0$.

Algoritmo de Grassberger-Procaccia

Em 1983, P. Grassberger e I. Procaccia propuseram aproximar f_j^2 pela freqüência relativa com que 2 pontos estão separados de uma distancia menor ou igual a ϵ.

Seja q(ϵ) a fração de pontos do atrator que está dentro de uma hiper-esfera de raioϵ centrada em x_j. Esta fração é

$$q(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \sum_{k=1}^{N} H(\epsilon - \|\vec{x}_j - \vec{x}_k\|)$$

Em que N é o numero total de pontos do atrator, H(y) é a função degrau: A função de correlação C(ϵ) é definida como o valor médio de q(ϵ) sobre todos os pontos x_j:

$$C(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=1, j \neq k}^{N} q(\epsilon)$$

O valor de C é proporcional a ϵ se os pontos do atrator estão dispostos sobre uma reta e proporcional a ϵ^2 se os pontos estão espalhados. No caso de uma estrutura fractal G&P alegaram que $C \propto \epsilon^{D_2}$, ou seja

$$D_2 = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{\log C(\epsilon)}{\log(\epsilon)} \right)$$

Na prática calcula-se D_2 para vários ϵ e estima-se seu valor a partir da inclinação da parte linear do gráfico $\log C(\epsilon) \times \log(\epsilon)$.

Qual a utilidade de calcular D_2?

O algoritmo de contagem de caixas tem um custo computacional muito maior que a implementação do cálculo de D_2 de G&P, principalmente quando $D > 2$. Quando se estima D_2, obtém-se um limite inferior para D_0 uma vez que $D_2 \leq D_1 \leq D_0$ E $D_0 = D_2$ quando o atrator é homogêneo.

A grande vantagem de estimar D_2 usando G&P está no cálculo de dimensão de series temporais reais.