FGE417- Fenômenos Não-Lineares em Física:
Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos
Prof. Reynaldo Daniel Pinto

Notas de Aula - Parte 17

Informação e Entropia

A palavra informação possui um significado técnico muito parecido com o significado do senso comum. Uma mensagem é dita informativa se ela diz algo que antes era pouco esperado ou desconhecido. Isso significa que mais informação está contida nas mensagens menos prováveis.

Essa idéia é muito importante pois é possível medir a probabilidade de ocorrência de uma mensagem então pode-se medir seu conteúdo de informação de modo similar.

Hartley em 1928, estudando maneiras de medir a informação transmitida por sinais elétricos sugeriu que a informação surge da seleção sucessiva de símbolos pertencentes a dado vocabulário. Se há N símbolos disponívies em cada seleção, então a quantidade de informação H associada a uma seleção é $H = \log N$. Pode-se fazer um paralelo da quantidade H com a definição da entropia de Boltzmann $S = Kblog\omega$ onde ω são os microestados possíveis de um sistema.

Após alguns anos veio a 2^a guerra mundial e o interesse pela teoria dos processos de comunicação foi redescoberto. Shannon em 1948 publicou "The Mathematical Theory of Communication" onde expõe suas idéias sobre a teoria da informação fortemente influenciada pelo seu trabalho em criptografia durante a guerra.

A principal idéia de Shannon é que uma mensagem tem um conteúdo de informação que independe do meio usado para gerar ou transmitir essa informação. A quantidade de informação h de um evento pode ser definida como:

$$h = \log \frac{1}{p} = -\log p$$

Essa fórmula condiz com várias propriedades compatíveis com o conceito de informação.

- Se a probabilidade é pequena, a informação h é grande. Se p=1, h=0
- *Aditividade*: Sejam duas mensagem com probabilidade p_A e p_B. A probabilidade de ocorrer ambas mensagens é $p(A,B) = p_A.p_B$. A informação é então: $h(A,B) = -\log(p_A.p_B) = -\log p_A - \log p_B = h(A) + h(B)$.

Se existirem N mensagens possíveis cada qual com probabilidae p_j e quantidade de informação h_j, então a quantidade média de informação obtida por mensagem é:

$$H = \sum_j p_j h_j \quad ou \quad H = -\sum_{j=1}^{N} p_j \log p_j$$

Shannon chamou a quantidade H de entropia informacional, que é medida em bits/mensagem ou bits/simbolo. Qual a informação presente no espaço de fase de um sistema dinâmico?

Para responder a essa pergunta é necessário escolher um código que será usado para representar as diferentes mensagens possíveis.

Exemplo: Mapa logístico (figura!!!) Podemos considerar que o código é composto por dois símbolos R e L que representam a incidência das órbitas do lado direito e esquerdo do mapa, respectivamente de modo que a órbita pode ser representada pela sequencia LRLLLLRRLRLR. Posso também considerar que as mensagens são formadas por palavras com 2 símbolos, que formam 4 palavras possíveis: LL,LR,RL,RR.$\longrightarrow$ *Dinâmica Simbólica* (Holo Bailin).

Podemos também dividir o intervalo (0,1) do mapa logístico em 50 subintervalos e obter o valor de H em função do parâmetro μ. Se todos os subintervalos fossem equiprováveis, $H = \log_2 50 = 5,6$.

Como o valor de H depende do código escolhido, muitas vezes é mais interessante observar como a informação varia com o tempo, ou seja, observar a taxa com que ela aumenta ou diminui. A entropia métrica ou probabilística de Kolmogorov-Sinai (KS) é definida como a taxa média de criação de informação no sistema (ou taxa de perda de informação pelo observador). Se δx_i é um elemento de comprimento em um espaço de fases e e tem unidade de comprimento ($\epsilon << \Delta x_i$), $\Delta x_i = N\epsilon$, N é o número de subregiões em que Δx_i foi subdividido. Se lembrarmos que

$$\Delta x_i(t) = \Delta x_i(0)e^{\lambda_i t}$$

em que λ_i é o expoente de Lyapunov

$$H = \log_2 \frac{\Delta x_i(0)e^{\lambda_i t}}{\epsilon} \longrightarrow \frac{dH}{dt} \propto \lambda_i$$

Assim, se existir um ou mais expoentes de Lyapunov maiores que zero, ou seja se existir sensibilidade as condições iniciais, informação é produzida pelo sistema, ou seja, nossa nossa ignorância sobre o que esta ocorrendo no sistema aumenta. Se há mais de um expoente positivo, então a soma dos expoentes positivos será proporcional a taxa de produção de informação. Ruelle propôs a desigualdade

$$KS \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$$

Expoente de Lyapunov, Entropia KS, dimensão

Considere um sistema dinâmico m dimensional,

Comportamento	Exp. Lyapunov	KS	dimensão
regular	$\nexists \lambda_i > 0$	$KS = 0$	$D < m$; $D \in \mathbf{N}$
caótico	$\exists \lambda_i > 0$	$0 < KS \leq \sum_{\lambda_i>0} \lambda_i$	$D < m$; $D \in \mathbf{R}$ em fluxos $m \geq 3$
estocástico	-	$KS \longrightarrow \infty$	$D = m$