FGE417- Fenômenos Não-Lineares em Física:
Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos
Prof. Reynaldo Daniel Pinto

# Notas de Aula - Parte 18

## Reconstrução de Takens

Dado um sistema dinâmico com equações diferenciais conhecidas, seu atrator pode ser caracterizado pelo cálculo de $D_0, D_1, D_2, \lambda_i, KS, ...$
**Problema real**:mede-se alguma variável (amostragem) $\longrightarrow$ série temporal. Muitas vezes não se sabe quais as variáveis de estado, o número de dimensões do sistema ou a forma das equações diferenciais.

Em 1980 Packard, Crutchfield , Farmer e Shaw analisaram o comportamento do atrator de Rossler usando, ao invés das variáveis x, y e z, apenas uma série temporal da variável $x$ e suas derivadas $\dot{x}$ e $\ddot{x}$.

Neste novo espaço $(x, \dot{x}, \ddot{x})$ eles mostraram que a figura geométrica que caracteriza o comportamento assintótico do sistema é topologicamente equivalente ao atrator estranho original. Essa figura é chamada de atrator reconstruído. O atrator reconstruído e o original são caracterizados pelos mesmos valores de dimensões e expoentes de Lyapunov.

A partir da evolução temporal de uma única variável, neste caso x(t), pode-se determinar as características do atrator. $\dot{x}, \ddot{x}$ e derivadas de ordem superior podem ser representadas por equações de diferenças com passo infinitesimal. Assim,

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+2h) - 2x(t+h) + x(t)}{h^2}$$

A série temporal com N valores,

$$x_j = x(t_j) \rightarrow \{x(t_1), x(t_2), x(t_3), ..., x(t_n)\}$$

O cálculo numérico da derivada é muito sensível a ruído. Packard e colaboradores sugeriram, que se usasse diretamente x(t), x(t+h), x(t+2h) ao invés das derivadas.

Em 1981 Florens Takens demonstrou um teorema em segundo o qual no espaço de fase formado pelo eixo x(t), $x(t+h), x(t+2h)...x(t+(m-1)h)$ o atrator reconstruído é topologicamente equivalente ao atrator real.

A reconstrução de Takens supõe uma série com infinitos pontos $x_j$ e a ausência de ruído. Nestas condições as propriedades topológicas do atrator são preservadas usando-se $m \leq 2D_0 + 1$ sendo $D_0$ a dimensão de contagem de caixas do atrator real.

O espaço no qual o atrator é reconstruído é chamado de espaço de imersão ("embedding space") $m$ é chamada de dimensão de imersão e $h$ é o passo de reconstrução.

Em um caso real não se conhece $D_0$. O que fazer para definir $m$ da reconstrução? Existem vários métodos diferentes.

**Método 1** Consiste em usar o algoritmo de Grasberger-Procaccia e calcular $C(\epsilon)$ da série $x(t)$ para vários $m$ diferentes. A inclinação do gráfico $logC(\epsilon) \times \log(\epsilon)$ dá uma estimativa do valor de $D_2$ para cada $m$. O valor de $m$ é aquele em que $D_2$ deixa de variar. Se a série $x(t)$ é aleatória $D_2$ não satura para nenhum $m$.

### A escolha do passo de reconstrução

Takens nada fala sobre a escolha correta do passo de reconstrução. Se h é muito pequeno, x(t) e x(t+h) são muito correlacionados e muito próximos e haverá uma tendência de colapsar o atrator na diagonal(x(t+h)=x(t)). Por outro lado, se h é muito grande devido a divergência exponencial das coordenadas inicias próximas, x(t+h) e x(t) podem estar muito descorrelacionados, ou praticamente independentes, de modo que teremos a tendência a espalhar os pontos preenchendo todo o espaço de fase reconstruído, como aconteceria num processo estocástico. O h ideal é aquele em que x(t+h) ainda tem alguma correlação com x(t), mas esta não é muito forte. Baseados nesta idéia, dois métodos práticos mais populares para a escolha de h que podem ser usados são:

- **Método da função de autocorrelação**

$$C(h) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i . x_{i+1}$$

O melhor valor de $h$ é o que corresponde ao tempo de autocorrelação $\tau$ da série $\{x_i\}$. Para encontrar $\tau$ basta fazer o gráfico de $C(h)$ e encontrar $C(\tau) = \frac{C(0)}{2}$.

- **Método da Informação Mútua Média**

  - $P_x(x_i)$ é o histograma normalizado do conjunto $x_i$;
  - $P_y(y_i)$ é o histograma normalizado do conjunto $y_i$;
  - $P_{xy}(, x_i, y_j)$ é o histograma normalizado da ocorrência conjunta de $x_i$e$y_j$;

  A informação mútua média é definida como:

$$IMM = \sum_{x_i, y_j} P_{x,y}(x_i, y_j) \log_2 \left[ \frac{p_x(x_i) p_y(y_j)}{p_{xy}(x_i, y_j)} \right]$$

  Para encontrar o passo de reconstrução $h$ faz-se $x_i = \{x_i\}$ e $y_j = \{x_{i+h}\}$ e plota-se o valor da $IMM$ em função de $h$. O valor de h a ser usado na reconstrução é o que corresponde ao primeiro mínimo da $IMM$.

**Método 2** Método dos falsos vizinhos próximos ("false nearest neighbors").

- faz-se a reconstrução do atrator usando um passo adequado para $m = 1, 2, 3, 4...$
- calcula-se a porcentagem de pontos vizinhos em cada dimensão , para isso, usa-se uma hiperesfera de raio $\epsilon$ e calcula-se a distância m-dimensional entre pares de pontos. Se $d < \epsilon$ os pontos são vizinhos na dimensão m.
- Se na dimensão $m + 1$ os pontos deixam de ser vizinhos devido ao atrator ter se desdobrado então els eram falsos vizinhos produzidos pela projeção do atrator numa dimensão menor que a necessária.

Obs: O programa **TISEAN** é uma boa referência em métodos numéricos para análise de sinais(procurar na internet)