FGE417- Fenômenos Não-Lineares em Física:
Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos
Prof. Reynaldo Daniel Pinto

Notas de Aula - Parte 19

Controle de Caos

A sensibilidade exponencial a pequenas variações nas condições iniciais dos sistemas dinâmicos caóticos, apesar de reduzir rapidamente a capacidade de previsão do comportamento futuro destes sistemas, representa uma capacidade potencial de adaptação muito útil e sem similar em sistemas não caóticos.

Um estado desejado pode ser obtido rapidamente em um sistema dinâmico caótico se for possível perturbar o estado atual de forma adequada. O conjunto de técnicas que definem qual a perturbação adequada que deve ser introduzida em um determinado estado para obter o efeito desejado é chamado de controle de caos.

O primeiro trabalho publicado sobre controle de caos consistia na eliminação do comportamento caótico em favor do periódico (Ott et. al. 1990, Shinbrot et al. 1990) mas logo surgiram outros métodos que permitiam a transformação das órbitas caóticas em órbitas aperiódicas (Mehta e Henderson, 1991)

Técnicas experimentais de controle de caos estão sendo amplamente aplicadas e já existem trabalhos que visam utilizá-las para controlar o comportamento de células do coração e do cerebro e curar doenças como arritmias cardíacas (Witkowski et al, 1995, Witkowski et al 1998) e epilepsia (Schiff et al, 1994, Gluckman et al 1996).

O método OGY de controle de caos

O método de Ott, Grebogi e Yorke (Ott et al 1990) baseia-se na estabilização de órbitas periódicas instáveis associadas ao atrator caótico através de perturbações em um parâmetro p do sistema. Quando a trajetória $x(t)$ no espaço de fase passa próxima a uma órbita periódica instável que se deseja estabilizar, o valor de um parâmetro acessível p é ajustado de modo a direcionar a solução para aquela órbita.

A determinação de $p(x(t))$ tem que ser feita em tempo real e também é necessário calcular os autovalores associados à órbita que se deseja estabilizar ou conhecer o comportamento experimental das órbitas no espaço de fase nas vizinhanças da órbita instável.

Muitos métodos de controle de Caos são variações ou consistem em melhorias adicionais ao método OGY para torná-lo mais eficiente. A transformação do ponto fixo (So et al 1996; So e Ott, 1995) é um método de detecção das órbitas periódicas instáveis imersas no atrator e consiste na transformação da série de dados experimentais em uma série em que os pontos se concentram em torno dos pontos fixos instáveis.

No caso unidimensional queremos encontrar órbitas periódicas instáveis de período 1. A interpretação geométrica para a transformação do ponto fixo para um caso unidimensional está representada na Figura 1. Queremos achar o ponto (x^*, x^*) Os segmentos ligando pontos consecutivos que cruzam diagonalmente a reta $x_n = x_{n+1}$ são uma estimativa de x_*. A equação da reta que queremos cruzar com a diagonal é

$$x^* - x_{n+1} = \frac{df}{dx}(x^* - x_n)$$

$$\left(1 - \frac{df}{dx}\right) x^* = x_{n+1} - \frac{df}{dx} x_n \tag{1}$$

Para utilizar este método em um sistema dinâmico d-dimensional descrito pela função vetorial F com pontos fixos que satisfazem $X^* * = F(X^*)$, procede-se à medida da série temporal de uma das variáveis dinâmicas $\{x\}$. Os vetores reconstruídos $\{\mathbf{Z}_n\}$ são obtidos usando a reconstrução de Takens $\mathbf{Z}_n = (Z_n^1, Z_n^2, ..., Z_n^d)^t = (x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-d})^d$ onde $\mathbf{Z}_n$ é um vetor coluna e $\mathbf{Z}_n^t$ é a transposta de $\mathbf{Z}_n$. Transforma-se $\mathbf{Z}$ em $\hat{\mathbf{Z}}$ usando uma expressão para o caso d-dimensional análoga a equação (1)

$$(\mathbf{1} - \mathbf{J})\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}_{n+1} - \mathbf{J}\ \mathbf{Z}_n$$
$$\mathbf{Z}^* = (\mathbf{1} - \mathbf{J})^{-1}[\mathbf{Z}_{n+1} - \mathbf{J}\ \mathbf{Z}_n]$$

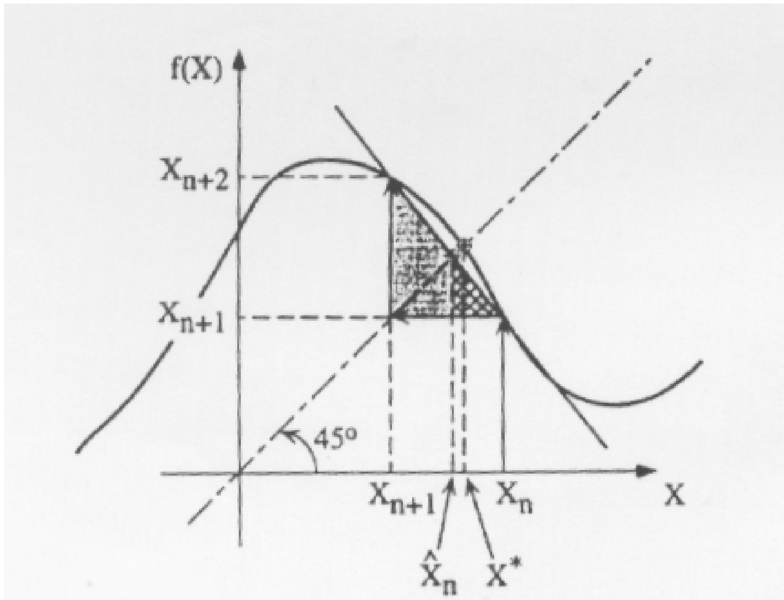

Figura 1:

Se ao invés da matriz Jacobiana **J** utilizarmos uma Jacobiana aproximada $\mathbf{S}_n$ temos em cada ponto:

$$\hat{\mathbf{Z}}=(\mathbf{1} - \mathbf{S}_n)^{-1}[\mathbf{Z}_{n+1} - \mathbf{S}_n\mathbf{Z}_n]$$

onde

$$\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} a_n^1 & a_n^2 & ... & a_n^{d-1} & a_n^d \\ & & \mathbf{1} & & \mathbf{0} \end{pmatrix} + k\mathbf{R}\|\mathbf{Z}_{n+1} - \mathbf{Z}_n\|$$

$$\begin{pmatrix} a_n^1 \\ . \\ . \\ a_n^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{Z}_n - \mathbf{Z}_{n-1})^t \\ . \\ . \\ (\mathbf{Z}_{n-(d-1)} - \mathbf{Z}_{n-d})^t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Z_{n-1}^1 - Z_n^1 \\ . \\ . \\ Z_{n-(d-2)}^1 - Z_{n-(d-1)}^1 \end{pmatrix}$$

R é uma matriz aleatória $d \times d$ em que cada elemento deve ser escolhido independentemente e com distribuição uniforme em [-1,1], k é a intensidade do termo aleatório e a norma utilizada na equação acima é $\|\mathbf{Z}\| = \sum_{i=1}^{d} |Z^i|$

A estimativa da posição dos pontos fixos instáveis é obtida diretamente da posição dos picos do histograma do conjunto dos dados transformados $\{\hat{z}\}$. Para obter resultados confiáveis deve-se fazer várias transformações para o mesmo conjunto de dados variando o parâmetro k para eliminar possíveis picos espúrios relacionados com singularidades matemáticas da transformação. Uma estimativa da matriz Jacobiana local também pode ser obtida da média das matrizes $\mathbf{S}_n$ com $k = 0$ que geram vetores $\hat{\mathbf{Z}}_n$ nas vizinhanças do ponto fixo.