FGE417- Fenômenos Não-Lineares em Física:
Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos
Prof. Reynaldo Daniel Pinto

Notas de Aula - Parte 20

Dinâmica Toroidal

Qualquer comportamento oscilatório periódico num espaço de fases pode ser transformado em um toro T^n ou em um ciclo limite (T^1) por uma mudança de variáveis adequada.

O comportamento das órbitas num toro pode ser estudado em um seção de Poincaré bidimensional (ciclo limite). Se considerarmos uma transformação que mantenha o raio do cilo limite constante reduzimios o sistema ao estudo de um mapa unidimensional que relaciona o ângulo atual com o ângulo anterior, como é o caso do mapa do círculo.

$$\theta_{n+1} = \left[\theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta n)\right] mod(1)$$

onde Ω é uma frequência externa e K é relacionado à amplitude da não-linearidade do sistema.

exemplo 1: caso não-linear ($K = 0$)

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega$$

Se $\Omega = \frac{2}{5} = 0.4$, o retornará ao vallor inicial após 5 iteradas. Tendo feito duas rotações. Se Ω é irracional, θ não volta exatamente ao valor inicial e o movimento é quasiperiódico. Se Ω é racional $\Omega = \frac{p}{q}$ (número de rotação) o mapa é cílico ou periódico).

O número de rotação W é definido por:

$$W = lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n - \theta_0}{n}$$

O que acontece quando $K \neq 0$? Considere o mapa do círculo

$$\theta_{n+1} = T(\theta) = \alpha + \varepsilon \sin\theta_n$$

No limite $\varepsilon \to 0$ é inútil tentar descobrir o número de rotação expandindo $W(T_n(\theta))$ porque as séries em ε divergem. Temos que usar um método indireto que consiste em procuar a a região do plano (α, ε) onde existe uma órbita periódica de período $W = \frac{s}{r}$ (racional). Para $\varepsilon = 0$ só temos $\alpha = \frac{2\pi s}{r}$. Para $\varepsilon \neq 0$ procuramos os parâmetros para os quais

$$\theta = T_r(\theta) = \theta + r\left(\frac{2\pi s}{r} + \alpha'\right) + \varepsilon \sum_{j=0}^{r-1} \sin(T^j\theta) \tag{1}$$

tem solução, usando ε e α' como parâmetros pequenos. Se $W = 1$, a equação (1) se reduz a

$$0 = \alpha' + \varepsilon \sin\theta \longrightarrow |\alpha'| = \varepsilon$$

Se $W = 1/2$, de (1):

$$0 = 2\alpha' + \varepsilon\sin\theta + \varepsilon\sin(\theta + \pi + \alpha' + \varepsilon\sin\theta)$$

expandindo $\sin(\theta + \pi + \alpha' + \varepsilon\sin\theta) = -\sin\theta - (\alpha' + \varepsilon\sin\theta)\cos\theta + ...$

$$2\alpha' = \alpha'\varepsilon\cos\theta + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin(2\theta)$$

$$|\alpha'| \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

Como $2\alpha' \gg \alpha'\varepsilon\cos\theta$ estes resultados significam que uma frequencia de forçamento irracional produz movimento periódico. Essa característica é conhecia como travamento de frequências (”frequency locking”) e W é independente da condição inicial θ_0 Considere o espaço de parâmetros (ε, α) com as regiões de movimento periódico (W=racional).

As regiões de movimento periódico que aparecem na vizinhança de $\frac{p}{q}$ =racional são chamadas *línguas de Arnold*.

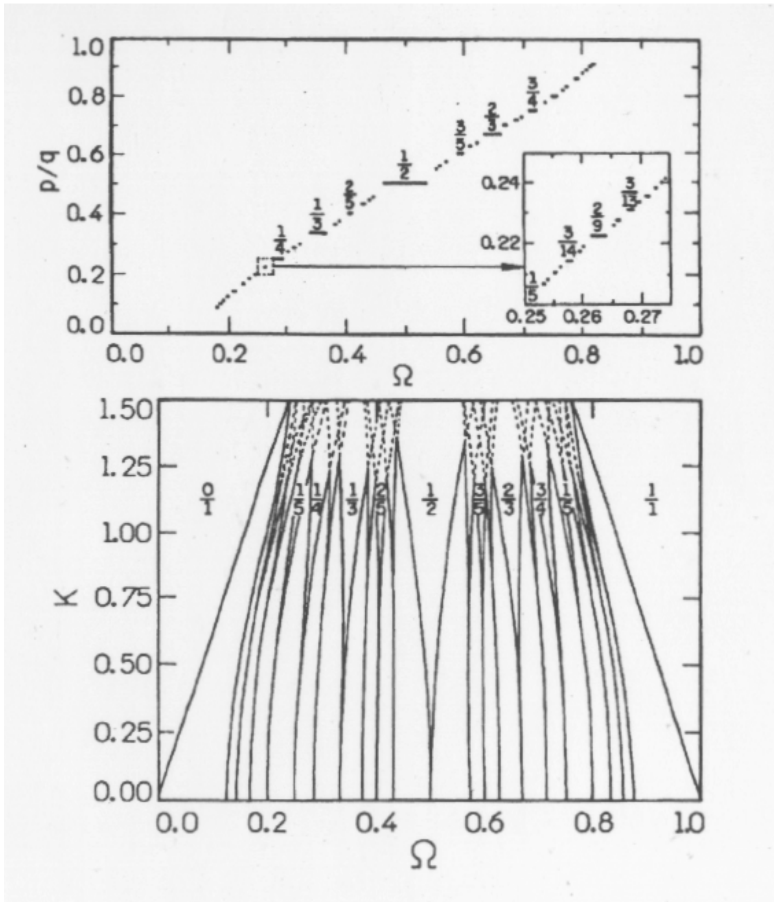

Figura 1:

Para $\varepsilon = 0$ as linguas de Arnold formam um conjunto de medida nula $\rightarrow \frac{p}{q}$ =racional Para $\varepsilon = 1$ as línguas de Arnold formam um conjunto de Cantor em que apenas W racionais são disponíveis para a oscilação.

O grafico $W(\alpha)$ apresenta apresenta infintos degraus com os degraus mais largos correspondendo aos números racionais mais simples (menores denominadores).

Como entre cada dois racionis é possível achar um outro, a figura foi chamada de *escada do diabo* e tem uma dimensão $D = 0.87$.

Sistemas Dinâmicos Conservativos

Energia = Constante $H = H(J, \theta)$ *Não existe dissipação* *Não existem atratores*

Geralmente, além da energia há outras constantes de movimento, como por exemplo o momento angular $\vec{L}$, o momento linear $\vec{p}$, etc... Neste caso as órbitas de um sistema hamiltoneano D dimensional permanecem em toros T^R, onde R = número de variáveis ângulo-ação - número de constantes de movimento. Um sistema caótico implica em não linearidade de H, de modo que H não é integravel.

Teorema de Poincaré

Seja $H(J,\theta) = H_0(J) + \lambda H_1(J,\theta)$ onde $H_1(J,\theta)$ é periódica em cada $\theta_i (i = 1, ..., N)$,

$$|\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_i \partial J_k}| \neq 0$$

Não existe nenhuma outra integral de movimento
a não ser a própria hamiltoniana

Em que H_0 é a Hamiltoniana não perturbada e H_1 é uma perturbação não-linear. A perturbação não-linear destrói os toros T^R

Teorema KAM

Seja uma hamiltoniana que satisfaz o teorema de Poincaré. existe uma transformação canônica para novas variáveis ângulo-ação onde a Hamiltoniana é fracamente perturbada pelas não-linearidades. Esta classe contém a maioria das soluções quando a perturbação tende a zero. Ou seja: muitos toros apenas são distorcidos pela erturbação,mas não são destruídos. Estes toros "resistentes"são chamados de superfícies ou toros KAM.