# O paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen

Franciele Renata Henrique
Instituto de Física de São Carlos - Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil
francielerenata@usp.br

**Resumo**

*Neste trabalho apresentamos o paradoxo de Einstein-Podolsky-Rosen e suas consequências epistemológicas. Introduzimos a discussão sobre Teorias de Variáveis Ocultas através das desigualdades de Bell. E, por fim, mostramos o famoso experimento de Alain Apect et al. que elucidou o paradoxo.*

## I. Introdução

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen publicaram um artigo [1] que questionou a interpretação de Copenhagen da Mecânica Quântica. Esta interpretação era defendida por Niels Bohr e, segundo ela, a função de onda $\Psi$ contém toda a informação necessária para caracterizar um sistema. Dessa forma, a Mecânica Quântica seria a última descrição da natureza.

## II. O Paradoxo EPR

### I. O Princípio da Incerteza de Heisenberg

Se pudermos prever com certeza o valor de uma quantidade física sem perturbar o sistema, então existe um elemento de realidade correspondente a essa quantidade física. Esta foi a definição de realidade utilizada por Einstein *et al.* em seu artigo de 1935 [1].

Segundo a interpretação de Copenhagen da Mecânica Quântica, a função de onda $\Psi$ contém toda a informação sobre um estado. Para uma quantidade fisicamente observável existe um operador $A$ que ao atuar sobre uma autofunção $\Psi_a$ resulta em

$$\Psi'_a \equiv A\Psi_a = a\Psi_a \tag{1}$$

onde $a$ é um autovalor que pode ser medido. Dessa forma, a observável $A$ tem certamente o valor $a$ quando o sistema está no estado $\Psi_a$, ou seja, existe um elemento de realidade correspondente a $A$.

Consideramos agora duas observáveis $A$ e $B$ que não comutam, ou seja, $AB \neq BA$ com autovalores $a$ e $b$, respectivamente.

$$B\Psi_b = b\Psi_b \tag{2}$$

Sabemos, pelo princípio da incerteza de Heisenberg, que se medirmos $a$ a quantidade $b$ torna-se indeterminada e não pode ser prevista. O valor de $b$ só pode ser obtido através de medida direta. Esta medida, porém, perturba o sistema e altera o estado para $\Psi_b$.

Utilizando a definição de realidade descrita acima, podemos concluir que, se $a$ é conhecido, $b$ não apresenta realidade física. Dessa forma, podemos chegar a duas hipóteses: (1) a função de onda não nos fornece uma descrição completa da realidade ou (2) quando dois operadores não comutam, as duas quantidades físicas relacionadas a eles realmente não apresentam realidade física simultaneamente.

### II. Estados Emaranhados

Consideramos agora dois sistemas 1 e 2 cujos estados são conhecidos num tempo $t = 0$. Estes sistemas interagem entre si por um tempo finito $\tau$. Através da equação de Schrödinger podemos calcular o estado $\Psi_{1+2}$ do sistema combinado $1+2$ em qualquer tempo $t > \tau$. $\Psi_{1+2}$ pode ser expresso da seguinte forma

$$\Psi_{1+2}(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1) \tag{3}$$

onde $x_1$ e $x_2$ são as variáveis utilizadas para descrever os sistemas 1 e 2, respectivamente; $u_n(x_1)$ são autofunções de um operador $A$ relacionado ao sistema 1 com autovalores $a_n$. $\psi_n(x_2)$ podem ser considerados como os coeficientes da expansão de $\Psi_{1+2}$ na base ortogonal formada por $u_n(x_1)$.

Se agora medirmos $A$ no sistema 1, encontrando um valor $a_k$, o estado do sistema combinado é reduzido para um único termo da equação 3 : $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$. Esse processo é conhecido como *redução do pacote de onda*, sendo que os sistemas 1 e 2 encontram-se nos estados $u_k(x_1)$ e $\psi_k(x_2)$ após a medida, respectivamente.

Podemos utilizar como base ortogonal o conjunto de autofunções $v_s(x_1)$ de um operador $B$ com autovalores $b_s$. Dessa forma, o estado do sistema pode ser expandido da seguinte forma

$$\Psi_{1+2}(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \phi_s(x_2)v_s(x_1) \qquad (4)$$

onde $\phi_s(x_2)$ são considerados como os coeficientes da expansão de $\Psi_{1+2}$ na base ortogonal $v_s(x_1)$.

Se medirmos $B$ no sistema 1, obtendo como resultado $b_r$, o estado do sistema combinado será reduzido para $\phi_r(x_2)v_r(x_1)$. O sistema 1 estará no estado $v_r(x_1)$ e o sistema 2 está no estado $\phi_r(x_2)$.

Através do *Gedankenexperiment* acima podemos concluir que duas medidas diferentes realizadas no sistema 1 deixam o sistema 2 em dois diferentes estados. Como as medidas são feitas num instante em que os sistemas não mais interagem, algo que seja feito com o sistema 1 não provoca nenhuma alteração no sistema 2. Com isso, concluímos que é possível que as duas funções de onda $\psi_k$ e $\phi_r$ correspondam ao mesmo elemento de realidade, ou seja, as duas funções de onda correspondem ao sistema 2 após a interação com 1.

É possível demonstrar [1] que as observáveis $A$ e $B$ podem corresponder a operadores que não comutam. Dessa forma, autofunções de operadores que não comutam pertencem ao mesmo elemento de realidade.

Na subseção I chegamos a duas hipóteses: (1) a função de onda não nos fornece uma descrição completa do sistema ou (2) quando dois operadores não comutam, as duas quantidades físicas relacionadas a eles não apresentam realidade física simultaneamente. No *Gedankenexperiment* realizado acima consideramos como falsa a hipótese (1) e chegamos à conclusão de que autofunções de operadores que não comutam correspondem à mesma realidade. Dessa forma, chegamos a uma contradição, pois a negação de (1) leva à negação de (2). Portanto, somos forçados a concluir que a função de onda não fornece uma descrição completa da realidade.

## III. As desigualdades de Bell

Com o advento do artigo de Einstein-Podolsky-Rosen [1] e sua conclusão final de que a Mecânica Quântica não seria completa, surgiram teorias que buscavam complementar a Mecânica Quântica com parâmetros adicionais. Para estados emaranhados, esses parâmetros seriam propriedades comuns dos membros do sistema que não seriam tratadas pela Mecânica Quântica. Estas teorias ficaram conhecidas como *Teorias de Variáveis Ocultas*.

Estas teorias têm como base fortes condições de localidade. Em um *Gedankenexperiment* do paradoxo EPR (Einstein-Podolsky-Rosen), localidade significa que uma medida no sistema $A$ não pode ser afetada por operações feitas no sistema distante $B$ com o qual $A$ interagiu no passado.

O confronto entre a Mecânica Quântica e as Teorias de Variáveis Ocultas permaneceu no âmbito epistemológico durante muitos anos, bem como a questão da completude da Mecânica Quântica. No entanto, em 1964 John S. Bell demonstrou que, devido às suas fortes condições de localidade, as Teorias de Variáveis Ocultas são restritas a certas desigualdades que não são sempre obedecidas pela Mecânica Quântica [2].

Para construir seu formalismo matemático, Bell utilizou uma versão do EPR *Gedankenexperiment* em que um sistema emaranhado composto por duas partículas com spin 1/2 está no estado singleto. As componentes de spin em várias direções são as observáveis não-comutantes que podem ser medidas. O estado do sistema combinado deve ser sempre singleto. Com esses argumentos Bell tirou a discussão fomentada pelo paradoxo EPR da cena epistemológica e a levou para o ramo matemático, criando desigualdades que podem ser testadas experimentalmente e modificadas conforme a natureza do experimento.

## IV. O experimento de Aspect

### I. A interpretação óptica do EPR *Gedankenexperiment*

A formulação das inigualdades de Bell abriu caminho para experimentos cujo objetivo era testar a completude da Mecânica Quântica. Em 1982, Alain Aspect utilizou a interpretação óptica do EPR *Gedankenexperiment* para realizar seus experimentos [3].

Na interpretação óptica, uma fonte emite pares de fótons fortemente correlacionados. Medidas da correlação entre as polarizações lineares dos dois fótons são feitas. Como mostra a Figura 1, dois fótons $\nu_1$ e $\nu_2$ são analisados pelos polarizadores lineares I e II, que fazem medidas ao longo dos eixos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ perpendiculares a $z$.

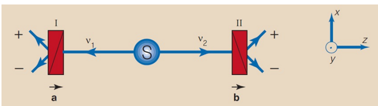


**Figura 1:** *A interpretação óptica do EPR Gedankenexperiment. Imagem retirada de [4]*

Cada medida tem dois possíveis resultados: $+$ ou $-$. As probabilidades das medidas realizadas nos fótons individuais podem ser encontradas para várias orientações dos polarizadores. Cada fóton pode ser encontrado aleatoriamente nos canais $+$ e $-$. Mas se o fóton $\nu_1$ é encontrado positivamente polarizado, seu fóton gêmeo $\nu_2$ também é encontrado positivamente polarizado.

Os fótons não interagem mais e a informação se propaga com velicidade máxima igual à velocidade da luz $c$. Podemos mudar a direção de análise da polarização antes que os fótons cheguem ao polarizador. Ainda assim, a medida da polarização de $\nu_1$ em uma certa direção implica que $\nu_2$ se encontrará polarizado na mesma direção. Pelas Teorias de Variáveis Ocultas isso ocorreria porque cada fóton carrega uma propriedade que determina sua polarização para cada direção de análise. A violação da desigualdade de Bell para esse caso, indica que a correlação entre as medidas não pode ser explicada por variáveis ocultas.

## V. Arranjo experimental

Alain Aspect *et al.* estudaram a correlação entre a polarização linear de pares de fótons através de um experimento com o arranjo experimental da Figura 2.

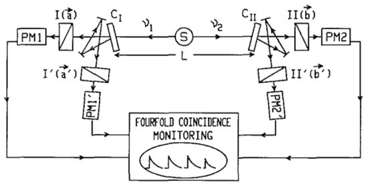


FIG. 2. Timing experiment with optical switches. Each switching device ($C_I$, $C_{II}$) is followed by two polarizers in two different orientations. Each combination is equivalent to a polarizer switched fast between two orientations.

**Figura 2:** *Arranjo experimental do experimento de Aspect et al. Imagem retirada de [3]*

Neste arranjo, dois *switches* optoacústicos são seguidos por polarizadores lineares. Esse sistema faz com que a polarização salte entre duas orientações em um tempo curto comparado ao tempo de vôo do fóton da fonte até o analisador. Aspect *et al.* utilizaram pares de fótons correlacionados com comprimentos de onda $\lambda_1 = 422,7nm$ e $\lambda_2 = 551,3nm$ obtidos pela excitação de dois fótons do cálcio. Se os dois *switches* trabalham randomicamente e não são correlacionados é possível escrever uma desigualdade de Bell semelhante a de Clauser-Horne-Schimony-Holt [5]:

$$-1 \leq S \leq 0 \tag{5}$$

com

$$S = \frac{N(\vec{a},\vec{b})}{N(\infty,\infty)} - \frac{N(\vec{a},\vec{b'})}{N(\infty,\infty')} + \frac{N(\vec{a'},\vec{b})}{N(\infty',\infty)} + \frac{N(\vec{a'},\vec{b'})}{N(\infty',\infty')} - \frac{N(\vec{a'},\infty)}{N(\infty',\infty)} - \frac{N(\infty,\vec{b})}{N(\infty,\infty)} \tag{6}$$

Os coeficientes $N$ correspondem à contagem de pares de fótons cuja polarização é a mesma nos sistemas I e II. A quantidade $S$ envolve as contagens feitas em diferentes configurações dos polarizadores ($N(\vec{a}, \vec{b})$, $N(\vec{a'}, \vec{b})$, etc.), contagens feitas sem nenhum polarizador ($N(\infty, \infty)$, $N(\infty', \infty)$, etc.) e contagens feitas sem o polarizador em um dos lados ($N(\vec{a'}, \infty)$, $N(\infty, \vec{b})$, etc.). Alain Aspect *et. al* obtiveram como resultado

$$S = 0.101 \pm 0,020 \tag{7}$$

Este resultado viola a desigualdade de Bell descrita acima.

## VI. Conclusão

O resultado obtido por Alain Aspect *et. al* indica que não podemos explicar o comportamento correlacional de um sistema emaranhado por variáveis ocultas. Dessa forma, não podemos afirmar que num sistema formado por dois fótons fortemente correlacionados todas as suas propriedades são determinadas na fonte e por eles carregadas. Concluímos, então, que um par de fótons emaranhados é um objeto não-separável, dessa forma não podemos atribuir realidade física local para cada fóton.

O experimento de Aspect *et. al* tornou falsa a hipótese de Einstein-Podolsky-Rosen de que a Mecânica Quântica não seria completa. Por um lado concluímos que a Mecânica Quântica é uma teoria completa, mas pelo outro observamos a não-localidade de sistemas emaranhados. Ainda não sabemos se essa não-localidade é realmente um problema para a descrição da realidade.

## Referências

[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.

[2] John S Bell et al. On the einstein-podolsky-rosen paradox. *Physics*, 1(3):195–200, 1964.

[3] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell's inequalities using time- varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dec 1982.

[4] Alain Aspect. Bell's inequality test: more ideal than ever. *Nature*, 398(6724):189–190, 1999.

[5] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880–884, Oct 1969.