UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

LABORATÓRIO AVANÇADO DE FÍSICA

FÍSICA NUCLEAR - FLUTUAÇÃO ESTATÍSTICA NA DESINTEGRAÇÃO RADIOATIVA & RADIAÇÃO GAMA

Para aprofundamento nesse tópico, é necessário a **leitura obrigatória** de textos relacionados a física nuclear como, por exemplo, encontrado no **Cap. 11 do Tipler de Física Moderna**. Informações adicionais-complementares acerca de radiações ionizantes podem obtidas em livros-texto especializados.

Aprofundamento: entenda e discuta a física do:

- processo completo de desintegração radiativa da fonte de Co^{60}, Sr^{90}, Cs^{137}, Tl^{204}, Ra^{226}, Th^{232} e Am^{241}. Indicando as partículas emitidas por cada elemento. Consulte e entenda (Table of Nuclides 1) ; (Table of Nuclides 2); (Table of Nuclides 3)
- Quais os mecanismos envolvidos na geração de partículas alfa, beta e gama? Exemplos (de decaimentos radiativos)? Aplicações?
- O que representa a tabela de nuclídeos?
- detetor de radiação Geiger-Muller, tensão de operação, largura de patamar e etc.
- diferença entre detetor Geiger-Muller e cintilador com fotomultiplicadora. Qual tipo de partícula cada um detecta e em quais condições.

- câmara de Wilson (câmara de nuvens) - (câmara de ionização).
- unidades de atividade de radioatividade (Curie, Becquerel, Sievert, rad e gray, etc).
- Determine a atividade de 1 grama de ^{137}Cs (em curies, Ci), se seu tempo de meia-vida (semi-vida) para a desintegração beta é de 27 anos. (1 Ci $= 3,7 \times 10^{10}$ desintegrações por segundo).

1 Flutuações Estatísticas

O decaimento radiativo é um processo aleatório. Portanto, qualquer medida baseada na observação da radiação emitida durante uma desintegração nuclear está sujeita a flutuações estatísticas.

Na primeira parte desse experimento, será realizada uma análise estatística para processar os resultados de experiências de decaimento/desintegração nuclear e sua contagem, além de testes para avaliar a aleatoriedade do sistema de medidas.

Na primeira experiência, são calculados os parâmetros que caracterizam um conjunto de N medidas independentes de uma mesma grandeza: a média ($\overline{n}$) e os desvios médio (d) e padrão (σ). A média representa o valor mais provável da grandeza, enquanto os desvios indicam o nível de confiança associado à sua variação. O desvio médio corresponde à média das diferenças absolutas entre os valores e a média do conjunto, fornecendo uma medida direta do afastamento médio sem considerar a direção das variações. Já o desvio padrão, ao elevar essas diferenças ao quadrado antes de calcular a média, enfatiza desvios maiores e é mais sensível a valores extremos. Fisicamente, o desvio médio reflete de forma intuitiva o espalhamento dos dados, enquanto o desvio padrão é mais adequado para situações em que flutuações extremas influenciam significativamente o comportamento do sistema.

Além disso, estudaremos o teste do χ^2, utilizado para determinar se as flutuações observadas nas medidas são consistentes com as flutuações esperadas, as quais têm origem somente estatística. Teremos a oportunidade de verificar que o χ^2 é um número com o auxílio do qual se pode testar a hipótese de que os desvios entre as frequências submetidas à comparação podem ser considerados como casuais, contra a de que tais desvios sejam significativos. Para isso, construiremos um histograma representativo e sobreporemos a ele a curva normal, facilitando a análise visual da distribuição dos dados.

Outra experiência trata do problema frequentemente enfrentado pelos pesquisadores que diz respeito ao tamanho que deve ter uma amostra (número de eventos), ou o tempo de contagem, a fim de evitar que uma medida seja realizada com precisão inadequada. Esta questão pode ser resolvida de modo relativamente simples quando se tem a noção do valor do desvio padrão (σ) da variável quantitativa que está sendo estudada.

1.1 Materiais

- Fontes radioativas Co^{60}, Sr^{90}, Cs^{137} , Tl^{204}, Ra^{226}, Th^{232} e Am^{241} atividade: $\sim \mu Ci$.
- Detector Geiger-Muller, fabricante Phywe tipo A, tipo B ou similar. Obs.: verifique qual detector está conectado ao equipamento e entenda quais partículas são detectáveis (α, β e γ), tensão de funcionamento, largura do patamar de tensão, ruído no patamar, tipo de janela e espessura, tipo de gás, tempo de vida de funcionamento e ruído de fundo natural. **Cuidado com a janela do detector Geiger-Muller - evite contato.**
- Sistema eletrônico composto de fonte de alta tensão (ajustado ao valor de operação do detector Geiger-Muller e contador Leybold Digital Counter.
- Software de controle.

1.2 Caracterização da amostra

Ao realizar múltiplas contagens de uma amostra radioativa, considerando que o intervalo de tempo entre as medições é insignificante em relação à meia-vida da amostra, não se obtém sempre o mesmo valor. Isso ocorre porque tanto a emissão de radiação quanto sua detecção seguem uma distribuição estatística, logo podem não ser constantes.

Assim, se forem observadas uma série de contagens n_1, n_2, n_3, ... n_N nas mesmas condições, o valor que melhor representa esta série será a **média aritmética**.

$$\overline{n} = \frac{\sum n_i}{N} \tag{1}$$

Todavia, é desejável que se faça sempre uma análise estatística dos dados. Através dela é possível estimar-se a precisão das contagens, verificar se o detector e todo o sistema eletrônico se encontra funcionando em ordem, predeterminar o erro que se quer cometer numa dada medida e até tornar mínimo o erro cometido, escolhendo-se convenientemente os tempos de contagem.

A distribuição que será obtida é a chamada binomial, que em casos particulares se reduz às distribuições de Gauss ou Poisson. O desvio padrão nestas distribuições pode ser calculado pela expressão: $\sigma = \sqrt{\overline{n}}$. E o desvio padrão de uma soma ou diferença de contagens é dado por:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \tag{2}$$

Busque entender mais detalhes sobre esses tipos de distribuições e suas aplicações.

Verificação do funcionamento de um sistema de contagens

Colocando-se num sistema de contagens uma amostra radioativa de vida longa comparada ao tempo de observação e repetindo-se sucessivamente a contagem num mesmo intervalo de tempo, sendo as contagens baixas, teremos os resultados distribuídos teoricamente como a distribuição de Poisson ou de Gauss.

Se o sistema está funcionando satisfatoriamente, verifica-se que esta previsão teórica é verdadeira. Por outro lado, se os resultados não se ajustam a uma distribuição normal, isto indica que há defeitos no sistema de detecção: ou no detector ou no equipamento eletrônico. Consequentemente, deve realizar-se periodicamente o chamado teste de funcionamento adequado do sistema de contagens. Quando um equipamento de contagem é suspeito de registrar espúrias, provenientes de fatores que não dizem respeito à radiação nuclear, pode-se fazer ensaios comparando os desvios nos resultados de medidas sucessivas.

Uma técnica muito útil é a do chamado **teste do χ quadrado**, que permite avaliar a probabilidade de um certo conjunto de contagens ser uma distribuição gaussiana.

χ^2 é uma quantidade definida como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\overline{n} - n_i)^2}{\overline{n}} \tag{3}$$

onde N é o número de determinações feitas, n_i o valor da iésima contagem e $\overline{n}$ o valor médio das contagens.

Obtido o valor de χ^2, recorre-se a tabelas de distribuição de χ^2, nas quais se encontra a **probabilidade P** de obter certos valores de χ^2 para certos valores de N. Quanto menor for o valor de P, maior será a probabilidade das discrepâncias entre as contagens observadas terem ocorrido por acaso. Um valor de P muito pequeno leva então a suspeitar da existência de algum defeito no sistema de contagem. Do mesmo modo, um valor muito alto de P indica um acordo muito perfeito, o que também leva a suspeitar de algum vício sistemático no sistema de contagem. Na prática, aceita-se em geral, P entre 5 e 95%.

Agora que já sabemos calcular o valor de χ^2, suponhamos que fizéssemos uma infinidade de experiências. É evidente que, após cada uma dessas séries, poderíamos calcular um χ^2, obtendo assim uma infinidade desses valores. Se com tal infinidade de valores fizéssemos um gráfico, colocando em ordenada as porcentagens acumuladas com que eles foram encontrados, obteríamos uma **distribuição** de valores de χ^2 e a área delimitada por esta curva, dentro de determinadas metas, estará associada à probabilidade de ocorrência de um determinado valor de χ^2.

Esta é a informação básica encontrada nas tabelas em anexo da distribuição de χ^2. Estas ordenam as probabilidades de ocorrência (valores da integral da distribuição) entre 0,9995 e 0,0005 (99,95 - 0,05%), e os valores de χ^2 para os vários graus de liberdade do sistema (entre 1 e 200). O número de graus de liberdade de uma estatística, representado por ν, é definido como o número de observações independentes da amostra (isto é, seu tamanho) menos o número de informações que são necessárias ao cálculo dos valores esperados teoricamente.

Assim, por exemplo, numa experiência com uma moeda, fazendo lances de cara ou coroa, temos $2-1=1$ grau de liberdade, pois existem duas classes de resultados e necessitamos de uma única informação da amostra para calcular os valores esperados em cada uma delas. Num dado de faces teremos $v=6-1=5$.

Suponhamos por exemplo que queremos pôr à prova a hipótese de que os dados são provenientes de uma distribuição (Gauss, por exemplo), contra a hipótese contrária de não serem. Então, calcula-se o valor χ^2 obtido indicando se a hipótese de que os desvios são casuais (Gaussiana) não é significativa.

Nas tabelas de distribuição de χ^2 em anexo podem ser encontrados os valores de P calculados através da integral entre χ^2 e ∞, e então para diferentes graus de liberdade pode-se determinar a probabilidade associada ao valor calculado.

Procedimento experimental

1) Utilizando o castelo de chumbo (Pb), coloque a fonte radioativa (por exemplo, Cs^{137}) perto do detector e obtenha no *software* em torno de 100 medidas em períodos de dez e sessenta segundos. Uma tensão ao redor de 500 V no Geiger deve ser suficiente, justifique essa escolha [1]. As observações devem ser realizadas uma após a outra, sem interrupções longas e não devem ser mudadas as condições da experiência. No *software* exporte os dados, a terceira coluna indica as contagens.

Calcule os seguintes parâmetros:

- contagem média $\overline{n} = \frac{1}{N}\sum_1^N n_i$

  onde n_i são os valores das contagens e N o número de observações.

- desvios da contagem média: $\delta_i = |n_i - \overline{n}|$
- quadrados dos desvios: δ_i^2
- soma dos desvios: $\sum \delta_i$
- desvio padrão: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum \delta_i^2}{N-1}} \approx \sqrt{\overline{n}}$
- desvio médio: $d = \frac{\sum \delta_i}{\sqrt{N(N-1)}}$
- o valor de χ^2 e o valor da probabilidade P correspondente a este número de observações.
- Faça um histograma do número de eventos versus frequência, separando os dados em intervalos de 5 (ou 10 ou 20) unidades.

[1] Um estudo extra pode ser fixar um período de tempo e verificar com as contagens se alteram em função da tensão aplicada na PMT

Verifique e justifique:

- a raiz quadrada da média $\sqrt{n}$ é igual ao desvio padrão.
- a razão entre o desvio médio e o desvio padrão é da ordem de 4/5.
- Enumere as vezes (e determine a porcentagem) em que o desvio é maior do que o dobro do desvio padrão, isto deve ocorrer em $4,6\%$ dos casos. Justifique.
- Enumere as vezes (e determine a porcentagem) nas quais o desvio é maior do que o desvio padrão, isto deve ocorrer em cerca de $31,7\%$ dos casos. Justifique.
- A partir do valor de **P** encontrado indique se o sistema merece confiança ou não.
- Trace a curva normal sobreposta ao histograma dos valores observados. Um procedimento sugerido para a obtenção dos dados necessários se encontra no exemplo 1 em anexo.
- Um teste alternativo é constituído pelo chamado "Teste da hipótese da distribuição". Quando se quer pôr à prova a hipótese de que os dados se apresentam segundo uma distribuição dada, deve-se calcular:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-e)^2}{e} \tag{4}$$

onde O é o valor observado experimentalmente e e é o valor teórico esperado segundo a distribuição. A probabilidade extraída da tabela de distribuição do χ^2 vai permitir concluir, ou não, pela aceitação da hipótese enunciada acima, visto que o χ^2 indicará se a diferença entre a distribuição observada e a esperada é ou não significativa.

- Calcule o segundo e o terceiro momento (centrados na média) da distribuição observada e investigue a sua simetria. Para isto se pode utilizar as expressões seguintes:

$$m_2 = \left\{ \frac{\sum fx^2}{n} - \frac{\left(\sum fx\right)^2}{n^2} \right\} i^2 \tag{5}$$

$$m_3 = \left\{ \frac{\sum fx^3}{n} - 3\frac{\sum fx \sum fx^2}{n^2} + 2\frac{\left(\sum fx\right)^3}{n^3} \right\} i^3 \tag{6}$$

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \tag{7}$$

onde os dados estão agrupados em classes (codificadas) x, de frequência absoluta f, e com intervalo de classe i (veja exemplo 1), n é o tamanho da amostragem. O coeficiente de Fisher, g_1, é igual a zero quando a distribuição é simétrica. Ele indicará assimetria positiva quando for positivo ($g_1 > 0$) e, ao contrário, um alargamento da cauda da distribuição à esquerda da média quando for negativo ($g_1 < 0$).

Este procedimento pode ser repetido para outras fontes disponíveis: Co^{60}, Sr^{90}, Cs^{137} , Tl^{204}, Ra^{226}, Th^{232} e Am^{241}.

1.3 Distribuição do tempo de contagem entre a amostra e a radiação de fundo - determinação do tempo de contagem e/ou número de eventos.

Dada uma certa amostra, a **taxa de decaimento** (também conhecida como ritmo de contagem ou atividade) é definido como a razão entre o número acumulado num certo tempo **por** esse tempo $r = \frac{n}{t}$. (r de *rate*, em inglês)

Então, tomando-se uma amostra de 100 contagens por minuto (cpm) e contando-se durante um minuto, o seu erro estatístico será $\sqrt{100} = 10$; logo o erro porcentual será 10%. Tomando-se agora outra amostra de 10000 cpm e contando-se durante um minuto, seu erro estatístico será $\sqrt{10000} = 100$, logo o erro porcentual será 1%. Assim o erro da medida é dependente da atividade da amostra.

Na prática, ao ser realizada uma dada experiência, não se pode em geral dispor de amostras com atividade conveniente para um certo valor do erro. Para contornar isso, deve-se então aumentar o tempo de contagem de modo a obter-se, com qualquer atividade, o erro que for desejado.

Cálculo do erro padrão quando se faz a contagem durante um certo tempo

O taxa de contagens é então dado por:

$$r = \frac{n}{t} \tag{8}$$

Pela teoria dos erros calcula-se:

$$\sigma_r^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)^2 \sigma_n^2 \tag{9}$$

Desprezando o erro no tempo e lembrando que $\sigma_n = \sqrt{n}$, obtém-se:

$$\sigma_r^2 = \left(\frac{n}{t^2}\right) \quad \therefore \quad \sigma_r = \frac{\sqrt{n}}{t} \tag{10}$$

Logo, a taxa de contagens será:

$$r \pm \sigma_r \quad \text{ou} \quad r \pm \frac{\sqrt{n}}{t} \quad \text{ou} \quad r \pm \sqrt{\frac{r}{t}}$$

O erro porcentual é dado por:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_r}{r} = \frac{\sqrt{\frac{r}{t}}}{r} = \frac{1}{\sqrt{rt}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{11}$$

Na prática, isto só é válido quando a radiação/contagem de fundo é desprezível, caso contrário, deve ser levada em consideração.

Chamando:

r_A - taxa de contagem da amostra;

r_T - taxa de contagem da amostra mais radiação de fundo (total);

r_B - taxa de contagem da radiação de fundo (*background*);

tem-se:

$$r_A = r_T - r_B$$

Quando se faz a diferença, os erros estatísticos se somam:

$$\sigma_{rA}^2 = \sigma_{r_T}^2 + \sigma_{rB}^2 \tag{12}$$

$$r_T = \frac{n_T}{t_T} \qquad \sigma_{r_T} = \frac{\sqrt{n_T}}{t_T} \tag{13}$$

$$r_B = \frac{n_B}{t_B} \qquad \sigma_{r_B} = \frac{\sqrt{n_B}}{t_B} \tag{14}$$

$$\sigma_{r_A} = \sqrt{\frac{n_T}{t_T^2} + \frac{n_B}{t_B^2}} = \sqrt{\frac{r_T}{t_T} + \frac{r_B}{t_B}} \tag{15}$$

Distribuição do tempo entre contagens da amostra e da radiação de fundo para erro mínimo

Seja T_T ($T_T = t_T + t_B$.) o tempo total para a contagem da amostra t_T e da radiação de fundo t_B. A primeira ideia seria contar menos tempo a amostra que possui contagem mais alta e mais tempo a radiação de fundo que obviamente será menor. Entretanto, isso é completamente falso.

Temos:

$$\sigma_{r_A}^2 = \frac{r_T}{t_T} + \frac{r_B}{t_B} \tag{16}$$

mas

$$T_T = t_T + t_B \tag{17}$$

diferenciando teremos:

$$dT_T = dt_T + dt_B \tag{18}$$

como T_T é um tempo disponível fixo que temos para efetuar as medidas, então:

$$dT_T = 0 \tag{19}$$

e

$$dt_T = -dt_B \tag{20}$$

Como deseja-se cometer o mínimo erro possível, compatível com o tempo T disponível, diferencia-se a equação acima para impor a condição de mínimo:

$$2\sigma_{r_A} d\sigma_{r_A} = -\frac{r_T dt_T}{t_T^2} - \frac{r_B dt_B}{t_B^2} = 0 \tag{21}$$

e segue

$$\frac{r_T}{r_B} = \frac{t_T^2}{t_B^2} \tag{22}$$

$$\frac{t_T}{t_B} = \sqrt{\frac{r_T}{r_B}} \tag{23}$$

Procedimento experimental

- Faça poucas contagens de um minuto apenas para ter a ordem de grandeza da fonte e da radiação de fundo.
- Faça uma medida da fonte dada com erro percentual (precisão) da ordem de 1%. Qual o tempo necessário para essa medida? Apresente os cálculos feitos.
- Suponha dispor de quinze minutos para fazer uma contagem da amostra e da radiação de fundo. Calcule a melhor distribuição do tempo.
- Faça a medida e verifique qual o erro percentual encontrado.
- Com os resultados da contagem de 15 minutos para a amostra e a radiação de fundo, calcule o erro porcentual cometido quando desprezamos a radiação de fundo $\left(\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ou quando a consideramos $\varepsilon_A = \frac{\sigma_{rA}}{r_A}$. Expresse o resultado da amostra com seu valor, desvio padrão, erro percentual e unidade. Discuta seus resultados.
- Faça uma medida da radiação de fundo dentro e fora do castelo de chumbo, discuta os resultados e a origem das contagens obtidas.
- Expresse o valor (com sua incerteza) da atividade da amostra nas unidades padrão e compare com o esperado.
- Determine a fração de detecção do Geiger e determine a emissão total da amos-

tra. Com esse resultado determine a massa de Cs^{137}, baseado na sua atividade conhecida.

2 Radiação Gama

Estas instruções devem ser consideradas em conjunto com os textos: Users Guide GMD 10 (version 1.1) e Student Instructions GDM 10 (version 1.1) e o livro Melissimos.

- Inicialmente vamos investigar a influência da tensão de polarização do tubo PMT nas características do sinal medido. Como sugestão, faça as medidas com a fonte, por exemplo, de Co^{60} e varie as tensões entre 600-850V (em intervalos de 50V) com um tempo de integração de 60s. Verifique qual a emissão esperada para a fonte radioativa escolhida e em qual tensão é possível observar com clareza essa emissão. Em geral, essa emissão deve estar localizada nos canais intermediários do detector.

- Investigue agora a influência do tempo de integração nas características do sinal medido. Para tanto, ainda com a fonte de Co^{60}, selecione uma tensão de polarização determinada no item anterior e faça medidas com os seguintes tempos de integração: 3, 10, 30, 60, 120, 300 e 1000s.

- Tendo por base os resultados obtidos no item anterior, faça a calibração do sistema (conversão canal-energia), ou seja, deve-se escolher um tempo de integração e tensão, para uma clara observação do espectro da fonte radioativa escolhida. A calibração irá converter a digitação em 1024 canais para energia, utilize a função centroide e justifique qual a característica da fonte, como uma, duas ou mais emissões características. Salve o arquivo de calibração e utilize nas próximas medidas. Cada arquivo deve ser salvo com a opção "save as text-file". Para abrir uma calibração já realizada, crie um "new file", clique em "calibrate", depois em "from file", e selecione a calibração previamente salva. Ao salvar e abrir essas medidas em outro software, é necessário considerar novamente a conversão canal-energia. Vale lembrar, no entanto, que os arquivos dos espectros calibrados não terão os valores de energia no eixo x. Em vez disso, a segunda linha do arquivo conterá a letra C, seguida de dois números que representam os coeficientes da calibração. O primeiro número corresponde ao coeficiente linear, e o segundo ao coeficiente angular. Assim, os valores de energia podem ser obtidos multiplicando o número do canal pelo coeficiente angular e somando o coeficiente linear.

- As melhores condições encontradas nos itens anteriores devem ser consideradas para a medida da radiação de fundo e de outras fontes radiativas: Co^{60}, Sr^{90}, Cs^{137} , Tl^{204}, Ra^{226}, Th^{232} e Am^{241} e radiação de fundo. De acordo com a literatura, faça a identificação de todos os sinais obtidos e discuta os seus resultados.

Obs.: Pode ser necessário ajustar algumas condições experimentais — como a distância entre a fonte e o detector, a tensão do fotomultiplicador (PMT), o tempo de integração, entre outros — para obter espectros mais consistentes com o esperado. Esses ajustes devem ser justificados com base nas características da fonte e na intensidade da radiação detectada. Além disso, recomenda-se subtrair a radiação de fundo das amostras medidas. Para isso, utilize a opção "File – Subtract", com um espectro obtido sem nenhuma amostra presente, que servirá como referência de fundo ("zero"). Esse espectro de fundo representa realmente radiação gama? De onde ele vem?

- Faça também um gráfico do canal em função da energia para cada emissão obtida dos elementos.
- Para todas as fontes meça a emissão com contador Geiger-Muller, discuta uma forma de distinguir o tipo de partícula emitida por cada um.
- Explique o que é "Compton Continuum"e "Compton Edge".
- Meça também e identifique outras amostras disponíveis no laboratório (areia, camisa de lampião, detector de fumaça, etc.).
- Faça um estudo variando a distância da fonte de Cs^{137} ao detector de 0 a 9 cm, com passo de 0,5 cm. Compare com o valor esperado e intérprete.
- Entre a fonte de Cs^{137} e o detector insira placas de chumbo. Compare com o valor esperado e intérprete. O valor da camada semirredutora é fiel? Proponha
- Em todos os itens: análise, discuta, e conclua acerca dos resultados obtidos.