

2ª Prova de Quântica B - SFI5707

#USP:

Nome:

23 de maio de 2013

1. (3,0 pontos) Quando quantizado, um campo escalar neutro massivo é dado por

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k V}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right),$$

onde $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ e $a_{\mathbf{k}}$ obedecem relações de comutação bosônicas e

$$\omega_k = c \sqrt{k^2 + (mc/\hbar)^2}.$$

- (a) Qual a interpretação física dos operadores $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ e $a_{\mathbf{k}}$?
(b) Considerando que o Hamiltoniano seja $H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$, escreva $\phi(\mathbf{r})$ na representação de Heisenberg, $\phi_H(\mathbf{r}, t)$.
(c) Calcule o comutador

$$[\phi_H(\mathbf{r}, t), \pi_H(\mathbf{r}', t)], \text{ onde } \pi_H(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi_H.$$

Dado o seu resultado, qual a interpretação física de $\pi(\mathbf{r})$?

2. (4,5 pontos) Queremos estudar a contribuição magnética nos decaimentos eletrônicos espontâneos do átomo de hidrogênio. Portanto, considere o termo de interação

$$V(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})), \text{ onde } \boldsymbol{\mu} = g\mu_B \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2},$$

sendo $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ o magneton de Bohr, g o fator giromagnético, e $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ sendo matrizes de Pauli.

- (a) Em primeira ordem de teoria de perturbação, quais são os elementos de matriz de interesse?
(b) Mostre que, na aproximação de dipolo magnético e no limite não-relativístico (i.e., considerando que as autofunções são aquelas da equação de Schrödinger com um próton infinitamente pesado), não há transições de dipolo magnético. (Esta é uma das razões que fazem o estado 2s ser meta-estável.) (Dica: considere o decaimento espontâneo $2s \rightarrow 1s + \gamma$ e depois generalize para quaisquer estados eletrônicos final e inicial.)
(c) Considere agora o decaimento do Hiperion (qualquer bárion contendo pelo menos um quark estranho). Considere em particular o decaimento espontâneo do Hiperion sigma no Hiperion lambda: $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$. Não há uma teoria unificada das interações fortes e eletromagnéticas, mas num modelo fenomenológico, esse decaimento seria modelado pelo seguinte Hamiltoniano de interação

$$W = \frac{\kappa e\hbar}{(m_\Sigma + m_\Lambda)} T_{\Lambda\Sigma} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))|_{r=0},$$

onde o campo magnético é calculado em $\mathbf{r} = 0$ (que é onde Σ^0 está localizado). Aqui, $m_\Sigma c^2 = 1192 \text{ MeV}$, $m_\Lambda c^2 = 1115 \text{ MeV}$ são as massas do Hiperions, $T_{\Lambda\Sigma}$ é um operador que transforma Σ^0 em Λ^0 (i.e., $T_{\Lambda\Sigma} |\Sigma^0\rangle = |\Lambda^0\rangle$), $\sigma^{x,y,z}$ operam no spin da partícula, e κ é uma constante adimensional do modelo fenomenológico. Discuta as semelhanças e diferenças (faça analogias) desse modelo fenomenológico com aquele usado para estudar as transições magnéticas do átomo de hidrogênio.

(d) Mostre que, quando o spin de Λ^0 não é medido, a distribuição angular dos Λ^0 ejetados é isotrópica mesmo quando Σ^0 está polarizado (ou seja, com spin “up”, por exemplo). (Dica: Calcule a taxa de todos os decaimentos possíveis, ou seja, considere todas as combinações possíveis de spins de Λ^0 e polarização de γ .)

(e) Em um experimento muito bem controlado, verifica-se que muitos Σ^0 são gerados. Faz-se então um histograma das energias dessas partículas e verifica-se uma bela curva que parece um sino de igreja. O pico dessa curva se dá em $m_\Sigma c^2$ e a largura de linha (largura a meia altura) é tal que $\frac{\Delta E_\Sigma}{m_\Sigma c^2} = 7.5 \cdot 10^{-6}$. Qual o tempo de vida do Hiperion Σ^0 ? Sendo que $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$ é o principal mecanismo de decaimento dessa partícula, quanto deve ser o valor da constante fenomenológica κ para que o modelo ajuste o experimento?

3. (2,5 pontos) Considere o fenômeno de espalhamento de luz por elétrons livres não-relativísticos (espalhamento Thomson).

(a) Qual é o Hamiltoniano de interação a ser considerado?

(b) O que se pode dizer sobre a polarização da luz que é espalhada no plano perpendicular ao feixe de fótons incidentes. Discuta os casos da polarização do feixe incidente ser linear e despolariizado.

(c) Calcule a seção de choque diferencial de espalhamento caso a luz incidente seja linearmente polarizada e a luz coletada não tenha sua polarização distinguida.

DADOS:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=\pm} \sqrt{\frac{1}{\omega_k}} \left(a_{\mathbf{k},\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda} + a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda}^* \right)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},1} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},2} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},1} - i \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},2})$$

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle F | V | I \rangle|^2 \delta(E_F - E_i)$$

$$\text{densidade de energia para fótons livres} \equiv \rho d\Omega = \frac{V}{(2\pi)^3} \times \frac{(\hbar\omega)^2}{(\hbar c)^3} d\Omega$$

$$\hbar = 6.58211928(15) 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

$$\int d\Omega \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \int d\Omega (1 \pm \cos \theta)^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

GABARITO:

1.

(a) Esses são, respectivamente, os operadores de criação e destruição de partículas livres de massa m e momento $\hbar\mathbf{k}$.

(Note que isto pode ser facilmente visualizado ao expandir a energia de cada partícula em torno do momento zero ($\hbar k \ll mc$):

$$E^2 = \hbar\omega_k \approx mc^2 + \frac{1}{2m} (\hbar k)^2,$$

que é a dispersão parabólica de partículas massivas não-relativísticas.)

(b) Queremos calcular

$$\phi_H(\mathbf{r}, t) = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \phi(\mathbf{r}) e^{i\frac{Ht}{\hbar}} = \sum_{\mathbf{k}} c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k V}} \left(e^{-i\omega_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} t} a_{\mathbf{k}} e^{i\omega_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + e^{-i\omega_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} t} a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\omega_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} t} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right).$$

Usando que $e^{-B} A e^B = A + \frac{1}{1!} [B, A] + \frac{1}{2!} [B, [B, A]] + \dots$, encontramos que

$$\begin{aligned} e^{-i\omega_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} t} a_{\mathbf{k}} e^{i\omega_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} t} &= a_{\mathbf{k}} + i\omega_k t [a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}] + \frac{(i\omega_k t)^2}{2!} [a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, [a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}]] + \dots \\ &= a_{\mathbf{k}} + i\omega_k t (-a_{\mathbf{k}}) + \frac{(i\omega_k t)^2}{2!} (-1)^2 a_{\mathbf{k}} + \dots \\ &= a_{\mathbf{k}} \left(1 - i\omega_k t + \frac{(-i\omega_k t)^2}{2!} + \dots \right) = a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_k t}. \end{aligned}$$

Então,

$$\phi_H(\mathbf{r}, t) = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \phi(\mathbf{r}) e^{i\frac{Ht}{\hbar}} = \sum_{\mathbf{k}} c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k V}} \left(a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right).$$

(c)

$$\begin{aligned} \pi_H &= \frac{1}{c^2} \times \sum_{\mathbf{k}} c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k V}} \left((-i\omega_k) a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} + (i\omega_k) a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{i}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2V}} \left(-a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} \right). \end{aligned}$$

O comutador é então

$$\begin{aligned} [\phi_H(\mathbf{r}, t), \pi_H(\mathbf{r}', t)] &= \frac{\hbar}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} i \sqrt{\frac{\omega_q}{\omega_k}} \left([a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)}, a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}' - \omega_q t)}] - [a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)}, a_{\mathbf{q}} e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}' - \omega_q t)}] \right) \\ &= i \frac{\hbar}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \left(e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} + e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \right) = i \frac{\hbar}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \rightarrow i \hbar \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} = i \hbar \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Note que essa é uma relação de comutação de variáveis conjugadas (assim como posição e momento). Logo, π é o operador de campo relacionado com os momentos das partículas (momento do campo).

2.

(a) Em primeira ordem, os elementos de matriz são do tipo

$$\langle F | V(\mathbf{r}) | I \rangle,$$

como estamos falando de decaimento espontâneo, os estados são do tipo

$$|I\rangle = |i\rangle_{\text{orb}} \otimes |s_i\rangle_{\text{spin}} \otimes |0\rangle_{\text{EM}}, \quad |F\rangle = |f\rangle_{\text{orb}} \otimes |s_f\rangle_{\text{spin}} \otimes |1_{\mathbf{q}, \beta}\rangle_{\text{EM}}.$$

Note que o estado final só tem 1 fóton (de momento \mathbf{q} e polarização β) porque $V(\mathbf{r})$ só pode criar 1 fóton (em primeira ordem). Por esse mesmo motivo, somente o operador de criação em $V(\mathbf{r})$ é de interesse. Agora queremos calcular o campo magnético

$$\nabla \times \mathbf{A} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=\pm} \sqrt{\frac{1}{\omega_k}} \left(a_{\mathbf{k},\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda} - a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda}^* \right).$$

Logo, teremos elementos de matriz do tipo

$$\frac{ig\mu_B}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=\pm} \sqrt{\frac{1}{\omega_k}} \langle F | \boldsymbol{\sigma} \cdot a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\lambda}^* | I \rangle.$$

Como o único operador atuando no vácuo do campo eletromagnético é $a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$ (e $a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger |0\rangle = |1_{\mathbf{k},\lambda}\rangle$), então temos

$$\frac{ig\mu_B}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_q V}} \langle f, s_f | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} | i, s_i \rangle \cdot (\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},\beta}^*).$$

Agora note que $\boldsymbol{\sigma}$ atua somente no spin do elétron enquanto $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ atua somente na parte orbital. Então podemos fazer a seguinte fatoração

$$\frac{ig\mu_B}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_q V}} \langle f | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | i \rangle_{\text{orb}} \langle s_f | \boldsymbol{\sigma} | s_i \rangle_{\text{spin}} \cdot (\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},\beta}^*).$$

(b) Os estados $|f\rangle = |n_f, \ell_f, m_f\rangle$ e $|i\rangle = |n_i, \ell_i, m_i\rangle$ são usuais do átomo de hidrogênio com 3 números quânticos. Logo, na aproximação de dipolo temos que

$$\langle f | e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | i \rangle_{\text{orb}} \approx \langle f | 1 | i \rangle_{\text{orb}} = \delta_{f,i}.$$

Logo, como os estados são ortogonais, temos que não há transição dipolar magnética entre orbitais ortogonais.

(c) Há várias semelhanças entre o decaimento eletrônico por transições magnéticas e o decaimento de Σ^0 . Em ambos os casos, temos uma interação do tipo $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$, ou seja, o decaimento é mediado por flutuações do campo magnético do vácuo que se acoplam com o spin da partícula (e^- ou Σ^0).

Além disso, temos várias semelhanças entre os outros termos. Comparando o termo $\mu_\Sigma = \frac{e\hbar}{m_\Sigma + m_\Lambda}$ com o magneton de Bohr $\frac{e\hbar}{2m}$, podemos fazer a analogia de que esse seria o magneton do Hiperion. O termo que acopla os orbitais, $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ (por exemplo $\langle 1s | e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} | 2s \rangle$), tem sua origem no potencial vetor \mathbf{A} . Entretanto, esse termo não aparece em W porque o potencial vetor é calculado somente na origem. Isso porque as dimensões do Hiperion são muito menores do que o comprimento de onda do fóton emitido. Entretanto, há um termo que faz o papel de conectar os orbitais final e inicial dos quarks: $T_{\Lambda\Sigma}$. Esse faz o papel de $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ nas transições nucleares. Finalmente, o fator giromagnético g tem seu semelhante na constante fenomenológica κ . Se há alguma razão profunda em todas essas semelhanças, então podemos ingenuamente esperar que κ seja uma constante da ordem de 1.

(d) Vamos considerar que o estado inicial do sistema é polarizado, ou seja,

$$|I\rangle = |\Sigma^0\rangle_{\text{orb}} \otimes |+\rangle_{\text{spin}} \otimes |0\rangle_{\text{EM}}.$$

Para calcular a distribuição angular de Hiperions Λ^0 ejetados, precisamos da seção de choque diferencial. Logo, precisamos das taxas de transições. E portanto, precisamos dos elementos de matriz análogos àqueles discutidos no item (a). Devemos considerar 4 possíveis decaimentos

$$\begin{aligned} |F_{+1}\rangle &= |\Lambda^0\rangle_{\text{orb}} \otimes |+\rangle_{\text{spin}} \otimes |1_{\mathbf{q},1}\rangle_{\text{EM}}, \\ |F_{+2}\rangle &= |\Lambda^0\rangle_{\text{orb}} \otimes |+\rangle_{\text{spin}} \otimes |1_{\mathbf{q},2}\rangle_{\text{EM}}, \\ |F_{-1}\rangle &= |\Lambda^0\rangle_{\text{orb}} \otimes |-\rangle_{\text{spin}} \otimes |1_{\mathbf{q},1}\rangle_{\text{EM}}, \\ |F_{-2}\rangle &= |\Lambda^0\rangle_{\text{orb}} \otimes |-\rangle_{\text{spin}} \otimes |1_{\mathbf{q},2}\rangle_{\text{EM}}. \end{aligned}$$

Sabemos que fótons só podem ter polarização circular. Mas como a polarização do mesmo não é medida, ou seja, no resultado final devemos somar todas as polarizações, então podemos considerar polarizações lineares. (O resultado final será o mesmo.)

Façamos agora o cálculo das taxas de transições. Pela regra áurea de Fermi,

$$w_{s,j} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle F_{sj} | W | I \rangle|^2 \rho(E_{q,j}).$$

Em todos os casos, a energia do fóton ejetado é $E_{q,j} = E_q = \hbar\omega_q = m_\Sigma c^2 - m_\Lambda c^2$. Como o fóton é muito mais leve que Λ^0 , a energia cinética de Λ^0 é desprezada (ou seja, Λ^0 fica praticamente parado). Logo,

$$\begin{aligned} w_{s,j} &= \frac{2\pi}{\hbar} \times \left| \frac{i\kappa\mu_\Sigma}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_q V}} \langle \Lambda^0 | T_{\Lambda\Sigma} | \Sigma^0 \rangle_{\text{orb}} \langle s | \boldsymbol{\sigma} | + \rangle_{\text{spin}} \cdot (\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},j}^*) \right|^2 \rho(\hbar\omega_q) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \times \left(\frac{\kappa\mu_\Sigma}{2} \right)^2 \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_q V} \right) |\langle s | \boldsymbol{\sigma} | + \rangle_{\text{spin}} \cdot (\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},j}^*)|^2 \rho(\hbar\omega_q) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \times \left(\frac{\kappa\mu_\Sigma}{2} \right)^2 \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_q V} \right) |(\langle s | - \rangle \hat{x} + i \langle s | - \rangle \hat{y} + \langle s | + \rangle \hat{z}) \cdot (\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},j}^*)|^2 \rho(\hbar\omega_q). \end{aligned}$$

Estamos prontos para olhar a distribuição angular dos fótons ejetados. Toda a informação de interesse se encontra no termo $|(\langle s | - \rangle \hat{x} + i \langle s | - \rangle \hat{y} + \langle s | + \rangle \hat{z}) \cdot (\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},j}^*)|^2$. A seção de choque será então proporcional a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega} w_{\text{tot}} &= \sum_{s,j} w_{s,j} \propto \sum_{s,j} |(\langle s | - \rangle \hat{x} + i \langle s | - \rangle \hat{y} + \langle s | + \rangle \hat{z}) \cdot (\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},j}^*)|^2 \\ &\propto |\hat{z} \cdot (\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},1}^*)|^2 + |\hat{z} \cdot (\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},2}^*)|^2 + |(\hat{x} + i\hat{y}) \cdot (\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},1}^*)|^2 + |(\hat{x} + i\hat{y}) \cdot (\mathbf{q} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},2}^*)|^2 \\ &\propto q^2 \left(|\hat{z} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},2}^*|^2 + |-\hat{z} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},1}^*|^2 + |(\hat{x} + i\hat{y}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},2}^*|^2 + |-(\hat{x} + i\hat{y}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},1}^*|^2 \right) \\ &\propto q^2 \left(0 + |-\sin\theta|^2 + |-\sin\phi + i\cos\phi|^2 + |-\cos\theta\cos\phi - i\cos\theta\sin\phi|^2 \right) \\ &\propto q^2 (0 + \sin^2\theta + 1 + \cos^2\theta) \propto 2q^2. \end{aligned}$$

Como não há dependência em θ e ϕ , então os fótons (e consequentemente os Λ^0) são ejetados isotropicamente. (Note que o mesmo resultado seria obtido usando $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{q},\pm}^*$.)

(e) O tempo de vida é

$$\tau_\Sigma = \frac{\hbar}{\Delta E_\Sigma} = \frac{\hbar}{7.5 \cdot 10^{-6} m_\Sigma c^2} \approx 7.4 \cdot 10^{-20} \text{ s}.$$

O tempo de vida é o inverso da taxa de decaimento $1/w$. Devemos agora calcular a taxa de decaimento total

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Omega} w_{\text{tot}} &= \frac{2\pi}{\hbar} \times \left(\frac{\kappa\mu_\Sigma}{2} \right)^2 \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_q V} \right) \times 2q^2 \times \rho(\hbar\omega_q) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \times \left(\frac{\kappa e \hbar}{2(m_\Sigma + m_\Lambda)} \right)^2 \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_q V} \right) \times 2 \left(\frac{\omega_q}{c} \right)^2 \times \frac{V}{(2\pi)^3} \times \frac{(\hbar\omega_q)^2}{(\hbar c)^3} \\ &= \kappa^2 \frac{1}{\hbar} \times \frac{e^2}{4(m_\Sigma + m_\Lambda)^2} \left(\frac{\hbar^2}{4\pi\epsilon_0 c} \right) \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{\pi} \times \frac{(\hbar\omega_q)^3}{(\hbar c)^3} \\ &= \kappa^2 \frac{1}{\hbar} \times \frac{(\hbar\omega_q)^3}{4(m_\Sigma c^2 + m_\Lambda c^2)^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right) \times \frac{1}{\pi} = \frac{\alpha \kappa^2}{4\pi} \frac{1}{\hbar} \times \frac{(\hbar\omega_q)^3}{(m_\Sigma c^2 + m_\Lambda c^2)^2} \\ &= \frac{\alpha \kappa^2}{4\pi} \frac{1}{\hbar} \times \frac{(m_\Sigma c^2 - m_\Lambda c^2)^3}{(m_\Sigma c^2 + m_\Lambda c^2)^2}. \end{aligned}$$

Integrating over all directions $\int d\Omega$, we get a 4π factor yielding

$$w_{\text{tot}} = \frac{1}{\tau_\Sigma} = \alpha \kappa^2 \frac{1}{\hbar} \times \frac{(m_\Sigma c^2 - m_\Lambda c^2)^3}{(m_\Sigma c^2 + m_\Lambda c^2)^2} \approx 9.5 \cdot 10^{17} \kappa^2 \text{ s}^{-1}.$$

Thus, we find that

$$\kappa = \frac{(m_\Sigma c^2 + m_\Lambda c^2)}{(m_\Sigma c^2 - m_\Lambda c^2)} \sqrt{\frac{7.5 \cdot 10^{-6} m_\Sigma c^2}{\alpha (m_\Sigma c^2 - m_\Lambda c^2)}} \approx 3.8.$$

3.

(a) Para espalhamento, dois termos contribuem. Em primeira ordem de teoria de perturbação, temos $\frac{e^2}{2m}A^2$, e em segunda ordem, temos $-\frac{1}{m}\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$. Para o caso do espalhamento Thomson, o segundo termo dá contribuições muito menores. Logo,

$$V = \frac{e^2}{2m} \sum_i A^2(\mathbf{r}_i),$$

onde \mathbf{r}_i são as posições dos elétrons (que vamos considerar apenas 1 daqui por diante).

(b) A regra áurea de Fermi nos diz que

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \left\langle \mathbf{q}_f; n_{\mathbf{k}',\lambda'} + 1, n_{\mathbf{k},\lambda} - 1 \left| \frac{e^2}{2m} A^2(\mathbf{r}) \right| \mathbf{q}_i; n_{\mathbf{k}',\lambda'}, n_{\mathbf{k},\lambda} \right\rangle \right|^2 \delta \left(\hbar\omega_{k'} + \frac{(\hbar q_f)^2}{2m} - \hbar\omega_k - \frac{(\hbar q_i)^2}{2m} \right),$$

onde um fóton (\mathbf{k}, λ) foi espalhado em \mathbf{k}', λ' enquanto o momento do elétron mudou de $\hbar\mathbf{q}_i$ para $\hbar\mathbf{q}_f$. A delta de Dirac impõe conservação de energia enquanto o elemento de matriz impõe conservação de momento (regras de seleção) como mostramos a seguir

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_f; n_{\mathbf{k}',\lambda'} + 1, n_{\mathbf{k},\lambda} - 1 | A^2 | \mathbf{q}_i; n_{\mathbf{k}',\lambda'}, n_{\mathbf{k},\lambda} \rangle &= \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \right) \langle F | \left(a_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} + a_{\mathbf{k},\lambda} a_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger \right) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \hat{e}_{\mathbf{k}',\lambda'}^* \cdot \hat{e}_{\mathbf{k},\lambda} | I \rangle \\ &= \left(\frac{\hbar}{\epsilon_0 V \sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \right) \sqrt{(n_{\mathbf{k}',\lambda'} + 1) n_{\mathbf{k},\lambda}} \langle \mathbf{q}_f | e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} | \mathbf{q}_i \rangle \hat{e}_{\mathbf{k}',\lambda'}^* \cdot \hat{e}_{\mathbf{k},\lambda}. \end{aligned}$$

O elemento de matriz final resulta em

$$\langle \mathbf{q}_f | e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} | \mathbf{q}_i \rangle = \int \frac{d^3r}{V} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}_i-\mathbf{k}'-\mathbf{q}_f)\cdot\mathbf{r}} = \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_i,\mathbf{k}'+\mathbf{q}_f}.$$

Integrando sobre os estados finais do fóton, temos que

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e^2}{2m} \right)^2 \left(\frac{\hbar}{\epsilon_0 V \sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \right)^2 (n_{\mathbf{k}',\lambda'} + 1) n_{\mathbf{k},\lambda} |\hat{e}_{\mathbf{k}',\lambda'}^* \cdot \hat{e}_{\mathbf{k},\lambda}|^2 \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_i,\mathbf{k}'+\mathbf{q}_f} \times \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{(\hbar\omega_{k'})^2}{(\hbar c)^3} d\Omega.$$

Dividindo pelo fluxo incidente $n_{\mathbf{k},\lambda}c/V$ (e considerando que não haviam fótons no estado espalhado ($n_{\mathbf{k}',\lambda'} = 0$), obtemos a seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma_{\lambda',\lambda}}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \left(\frac{\omega_{k'}}{\omega_k} \right)^2 |\hat{e}_{\mathbf{k}',\lambda'}^* \cdot \hat{e}_{\mathbf{k},\lambda}|^2 \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_i,\mathbf{k}'+\mathbf{q}_f}.$$

Note que a diferença entre as magnitudes k e k' é muito pequena por ser de origem quântica. Por exemplo, considere a diferença entre os comprimentos de onda

$$\Delta = \frac{2\pi}{k'} - \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{kk'} (k - k').$$

Mas da conservação de energia temos que $k - k' = \frac{\hbar}{2mc} (q_f^2 - q_i^2)$, ou seja, quando $\hbar \rightarrow 0$, $\Delta k \rightarrow 0$. Agora usando conservação de momento e, por simplicidade, considerando que $q_i = 0$, temos que $k - k' = \frac{\hbar}{2mc} q_f^2 = \frac{\hbar}{2mc} |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 = \frac{\hbar}{2mc} (k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \theta)$. Supondo que a mudança de k seja pequena ($k \approx k'$), então $k - k' \approx \frac{\hbar}{mc} k^2 (1 - \cos \theta)$. Logo, $\Delta \approx \frac{2\pi\hbar}{mc} (1 - \cos \theta)$, que é pequeno da ordem de $\hbar/(mc)$. Portanto, $\omega_k - \omega_{k'}$ também deve ser muito pequeno. (Esse é o efeito Compton.)

Finalmente, a seção de choque diferencial correspondente é

$$\frac{d\sigma_{\lambda',\lambda}}{d\Omega} = r_0^2 |\hat{e}_{\mathbf{k}',\lambda'}^* \cdot \hat{e}_{\mathbf{k},\lambda}|^2,$$

onde $r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$ é o raio clássico do elétron, e \mathbf{k} e λ (\mathbf{k}' e λ') é o momento e polarização do fóton incidente (espalhado), respectivamente.

Para simplificar a análise, vamos supor, sem perda de generalidade, que $\mathbf{k} = k\hat{z}$, $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},1} = \hat{x}$, e $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},2} = \hat{y}$. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{1,1}}{d\Omega} &= r_0^2 |\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}',1} \cdot \hat{x}|^2 = r_0^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi, \\ \frac{d\sigma_{2,1}}{d\Omega} &= r_0^2 |\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}',2} \cdot \hat{x}|^2 = r_0^2 \sin^2 \phi, \\ \frac{d\sigma_{1,2}}{d\Omega} &= r_0^2 |\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}',1} \cdot \hat{y}|^2 = r_0^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi, \\ \frac{d\sigma_{2,2}}{d\Omega} &= r_0^2 |\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}',2} \cdot \hat{y}|^2 = r_0^2 \cos^2 \phi.\end{aligned}$$

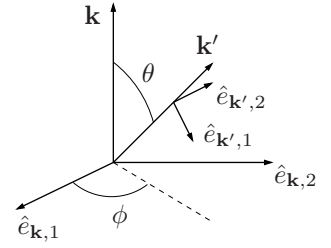


Figura 1: Vetores de propagação e polarização.

Com isso, podemos analisar a polarização da luz espalhada perpendicularmente ao plano de incidência ($\theta = \frac{\pi}{2}$) (vide Fig. 1). Note que $\frac{d\sigma_{1,1}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{2,1}}{d\Omega} = 0$, ou seja, para ambas as polarizações da luz incidente, temos que não há espalhamento de luz com polarização na direção $\hat{\mathbf{e}}_{\frac{\pi}{2},1} = -\hat{z}$. Podemos concluir então que em ambos os casos de luz incidente polarizada ou despolarizada, a luz espalhada perpendicularmente ao feixe incidente tem sua polarização contida no plano de espalhamento.

(c) Vamos supor que a luz incidente tenha polarização na direção $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},1} = \hat{x}$. Logo, as seções de choque de luz espalhada com polarização nas direções $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}',1}$ e $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}',2}$ são, respectivamente,

$$r_0^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi \text{ e } r_0^2 \sin^2 \phi.$$

Como não fazemos distinção da polarização da luz espalhada, então a seção de choque diferencial desejada é

$$\frac{1}{2} r_0^2 (\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi).$$

Aqui, ϕ é o ângulo formado entre a direção de polarização de luz incidente e a direção de propagação da luz espalhada projetada no plano perpendicular ao feixe incidente. O ângulo θ é aquele formado entre a direção do feixe incidente e a direção da luz espalhada.