Lista 7 - Física Estatística FCI0319

Para correção, entregue somente os exercícios marcados por †.
1. Reif: 10.8, †10.9
†2. Problema 8.5 do Gould e Tobochnik.
3. Solução exata do modelo de Ising unidimensional
Considere o Hamiltoniano

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} - h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i,$$

onde $\sigma_i = \pm 1$ representa os possíveis valores dos spins localizados numa cadeia com N spins, e $J > 0$ é a constante de acoplamento que representa a intensidade da interação ferromagnética entre os spins, e h representa a intensidade da interação dos spins com um campo magnético externo. Considere ainda condições periódicas de contorno $\sigma_{N+1} = \sigma_1$. Em 1D, o modelo é solúvel exatamente, ou seja, não há a necessidade da aproximação de campo médio.
(a) Escreva a função partição como o produto de várias matrizes 2×2 idênticas (uma para cada par de spins $\sigma_i \sigma_{i+1}$).
(b) Diagonalize as matrizes e calcule a função partição em termos dos autovalores.
(c) Calcule a magnetização do sistema e discuta sobre o seu comportamento nos limites de altas e baixas temperaturas. Este modelo exibe magnetização espontânea?
†4. More is the same; infinitely more is different[1]
O objetivo desse problema é exemplificar que transições de fase só são possíveis no limite de infinitos graus de liberdade. Para isso, é interessante estudar um modelo (mesmo que pareça artificial) onde podemos calcular a função de partição exatamente para qualquer N.
Considere uma rede unidimensional de N átomos localizados que interagem apenas com seus vizinhos próximos. Cada átomo pode estar em 6 configurações distintas conforme ilustra a Fig. 1(a), ou seja, em relação às setas, temos somente as possibilidades de 2 para dentro e 2 para fora (as famosas "regras do gelo"). Além disso, a interação entre os átomos é tal que permite somente interações que respeitem o alinhamento das setas conforme ilustra a Fig. 1(b). Finalmente, a energia associada às configurações (a1)—(a4) é ϵ_4 e a energia associada às configurações (a5) e (a6) é $\epsilon_2 < \epsilon_4$.

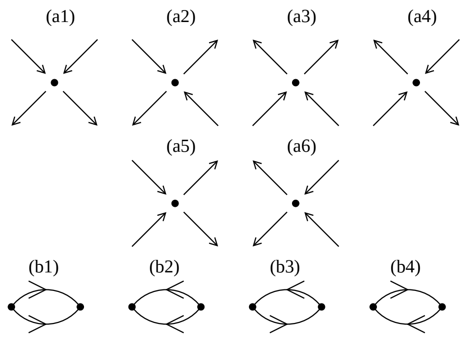

Figura 1: Possíveis configurações atômicas (a1)—(a6) e interações (b1)—(b4).

(a) Mostre que a densidade de energia livre se torna uma função não-analítica somente no limite $N \to \infty$.
(b) Calcule a temperatura T_c em que a não-analiticidade ocorre.
(c) A transição é de primeira ordem ou contínua?
(d) Calcule a descontinuidade da entropia em T_c: $\Delta S = S(T_{c+}) - S(T_{c-})$. Quanto vale o calor latente (por partícula) nessa transição?
5. Campo médio para o modelo de Heisenberg clássico
O modelo de Heisenberg ferromagnético é dado pelo Hamiltoniano

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \mu_B \mathbf{B} \cdot \sum_i \mathbf{S}_i,$$

onde $\mathbf{S}_i$ é um vetor tridimensional unitário, $\mathbf{B}$ é o campo magnético externo e $J > 0$ é a constante de troca. A primeira somatória se dá somente entre primeiros vizinhos de uma rede cristalina qualquer.
(a) Calcule o Hamiltoniano efetivo na aproximação de campo médio para esse modelo.
(b) Derive a equação de auto-consistência para a magnetização do sistema.
(c) Calcule a temperatura crítica e compare com a do modelo de Ising (também na aproximação de campo médio).
(d) Calcule os expoentes críticos β, γ, e δ, e compare com os valores do modelo de Ising (também na aproximação de campo médio).

---

[1] **Leo Kadanoff (arXiv:0906.0653) em referência à Philip W. Anderson (Science 1972).**