

FERROMAGNETISMO E O MODELO DE ISING

MODELO : $H = -J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j - B \sum_i \sigma_i$

$\sigma_i \equiv$ VARIÁVEL DE ISING = ± 1 $+1 \rightarrow$ SPIN \uparrow NUMA DETERMINADA DIREÇÃO ()
 $-1 \rightarrow$ SPIN \downarrow " " " " ()

$J \equiv$ CONSTANTE DE ACOPLAMENTO : $J > 0 \rightarrow$ FERROMAGNETISMO $\uparrow \uparrow$ ou $\downarrow \downarrow$
 $J < 0 \rightarrow$ ANTIFERROMAGNETISMO $\uparrow \downarrow$ ou $\downarrow \uparrow$

$\sum_{(i,j)} \rightarrow$ SOMA ENTRE I^{OS} VIZINHOS

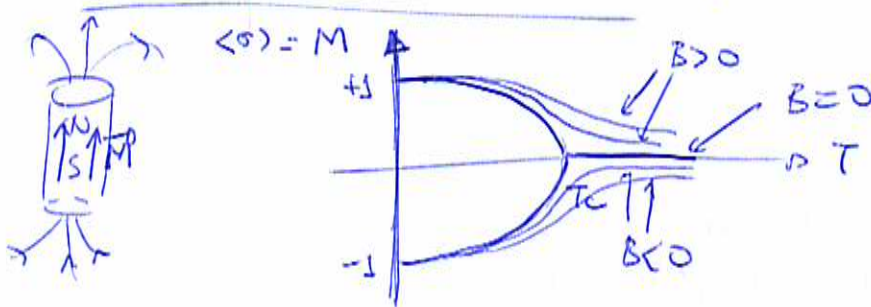
$B \rightarrow$ CAMPO LONGITUDINAL \rightarrow TÊNDE OS SPINS A SE ALINHAREM COM O CAMPO

VAMOS CONSIDERAR O CASO FM ($J > 0$)

\rightarrow MINIMIZAR ENERGIA \rightarrow CONSIDERAR ESTADOS DE BAIXA ENTROPIA (CRISTAL MAGNÉTICO)

\rightarrow TEMPERATURA \rightarrow AUMENTA A ENTROPIA \rightarrow "DECRETE" O CRISTAL MAGNÉTICO

FENOMENOLOGIA (EXPERIMENTOS)



$T_c =$ TEMPERATURA CRÍTICA (TEMPERATURA DE CURIE)

PARA $B = 0$, $M = \begin{cases} 0, & T > T_c \\ \pm cte (-t)^\beta, & T < T_c \end{cases}$
 E $T \approx T_c$

ONDE $t = \frac{T - T_c}{T} \equiv$ DISTÂNCIA À CRITICALIDADE

LEMBRE-SE QUE $M = \langle \sigma \rangle = \frac{\langle \sum \sigma_i \rangle}{N}$

$$= \frac{1}{2N} \sum_n \langle \sum_i \sigma_i \rangle e^{-\beta H_n} = \frac{1}{N\beta} \frac{\partial}{\partial B} Z$$

$$M = \frac{1}{N\beta} \frac{\partial}{\partial B} \ln Z$$

NOTE QUE $Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \equiv$ FUNÇÃO ANALÍTICA $C_\infty \Rightarrow M$ É ANALÍTICA

MAS, NO EXPERIMENTO, $M = \begin{cases} 0, & T > T_c \\ \neq 0, & T < T_c \end{cases} \rightarrow$ FUNÇÃO NÃO ANALÍTICA EM $T = T_c$

COMO É POSSÍVEL?

"DEFINIÇÃO" DE TRANSIÇÃO DE FASE \rightarrow QDO Z É NÃO ANALÍTICA

COMO É POSSÍVEL HAVER UMA TRANS. FASE?

R: SOMENTE NO LIMITE TERMODINÂMICO É POSSÍVEL TORNAR Z NÃO ANALÍTICO (VER LISTA DE EXERCÍCIOS)

NÃO-ANALITICIDADES APARECEM EM OUTROS "OBSERVÁVEIS"

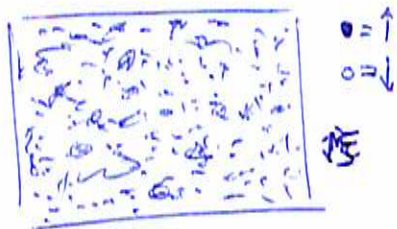
SUSCEPTIBILIDADE: $\chi = \frac{\partial M}{\partial H} \Big|_{H \rightarrow 0}$

DO EXPERIMENTO: $\chi = \begin{cases} ck t^{-\gamma} & , T > T_c \\ ck' (-t)^{-\gamma} & , T < T_c \end{cases}$
PARA $t \ll 1$

CALOR ESPECÍFICO: $C = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \Big|_{B=0} = \begin{cases} ck t^{-\alpha} & , T > T_c \\ ck' (-t)^{-\alpha} & , T < T_c \end{cases}$

MAGNETIZAÇÃO NA ISOTERMA CRÍTICA

$$M(T=T_c, B) = \begin{cases} ck |B|^{1/\delta} & , B > 0 \\ -ck |B|^{1/\delta} & , B < 0 \end{cases}$$



$T > T_c$

$\xi \equiv$ FINITO

$\tau \rightarrow$ FINITO

$M = 0$

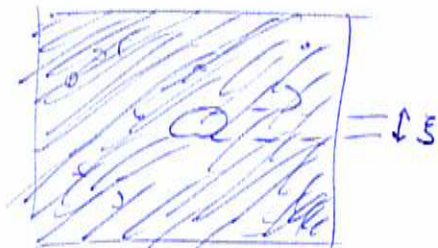


$T = T_c$

$\xi \rightarrow \infty$

$\tau \sim \xi^z$

$M = 0$



$T < T_c$

$\xi \rightarrow$ FINITO

$\tau \rightarrow$ FINITO

$M \neq 0$

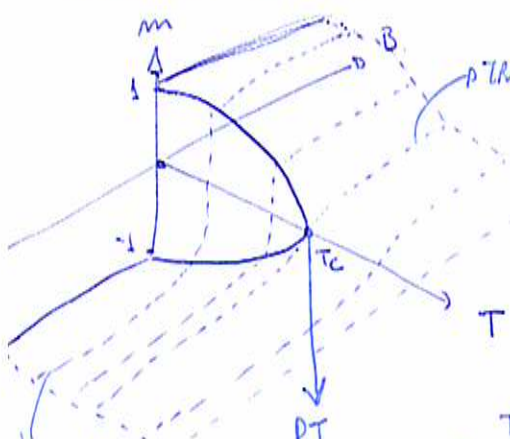
COMPRIMENTO DE CORRELAÇÃO (ξ)
E TEMPO DE RELAXAÇÃO (τ) DIVERGEM

$$\xi \sim \begin{cases} ct & t^{-\nu} & , T > T_c \\ ct' & (-t)^\nu & , T < T_c \end{cases}$$

= NO PT CRÍTICO \rightarrow VOLUME DE SPINS \uparrow (OU \downarrow) COM DIMENSÃO FRACTAL

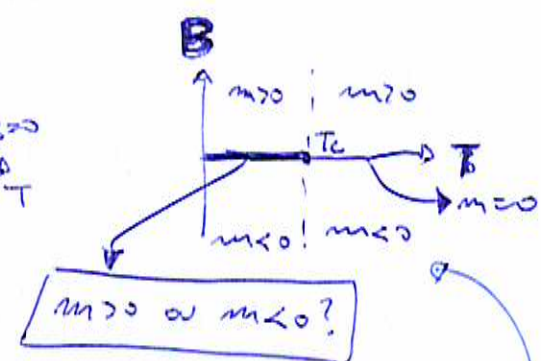
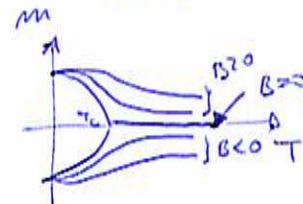
(MOSTRAR VÍDEO YOU TUBE)

DIAGRAMA DE FASES $m, B, T \Rightarrow m = m(B, T)$



TRANSIÇÃO DE 2ª ORDEM EM $B=0$, m É DESCONTÍNUO $m = -\partial f$

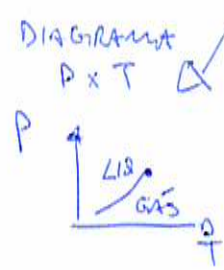
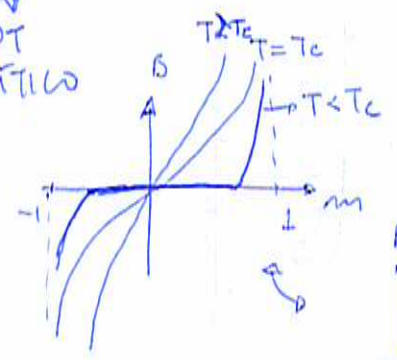
TRANSIÇÃO DE 2ª ORDEM QDO $B \neq 0$ VAI PARA $B=0$



$m > 0$ ou $m < 0$?

COMPARAÇÃO COM A TRANSIÇÃO LIQ-GÁS

- $m \leftrightarrow v$
- $B \leftrightarrow P$
- $T \leftrightarrow T$
- $m > 0 \leftrightarrow$ LIQ $\rightarrow v_L$
- $m < 0 \leftrightarrow$ GÁS $\rightarrow v_G$



FUNÇÃO PARTIÇÃO CANÔNICA

(4)

$$Z = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N} e^{-\beta H(\{\sigma_i\})} = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \beta B \sum_i \sigma_i}$$

$$\neq \left(\sum_{\sigma_1} e^{-\beta H_1} \right) \left(\sum_{\sigma_2} e^{-\beta H_2} \right) \dots \quad , \quad \text{OU SEJA, A SOMA}$$

NÃO É SEPARÁVEL

$$\neq Z_1^N$$

COMO FAZER A SOMA?

- EM 1D \rightarrow LISTA DE EXERCÍCIOS

\rightarrow Z É ANALÍTICA PARA QUALQUER $T \neq 0$,
OU SEJA, NÃO HÁ TRANSIÇÃO DE FASE

- EM 2D - PARA $B=0 \rightarrow$ SOLUÇÃO DE ONSAGER (1944)

HÁ UMA TRANSIÇÃO DE FASE 2D

$$\tanh(\beta_c J) = \exp(-2\beta_c J) \rightarrow \frac{J}{k_B T_c} = -\frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{k_B T_c = 2.26918 J} : \quad T > T_c \rightarrow \text{PM}$$

$T < T_c \rightarrow \text{FM}$

$$\beta = \frac{1}{8}$$

$$\gamma = 7/4$$

$$\alpha = 0 \quad (c \sim -\ln(1 - \frac{T}{T_c}) \rightarrow \text{DIVERGÊNCIA LOGARÍTMICA})$$

$$\delta = 15$$

$$\nu = 1$$

$$z = 1$$

$$\eta = \frac{1}{4} \rightarrow \langle \sigma_i \sigma_{i+n} \rangle \sim \frac{1}{n^{d-2+\eta}} \quad , \quad \begin{matrix} (T=T_c) \\ (B=0) \end{matrix}$$

CAMPO MOLECULAR DE WEISS (CAMPO MÉDIO)

5

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - B \sum_i \sigma_i = - \sum_i \left(B + J \sum_{\substack{j \text{ É VIZINHO} \\ \text{DE } i}} \sigma_j \right) \sigma_i$$

CAMPO EFETIVO VISTO PELO SPIN NO SÍTILO i

EM MÉDIA, ESSE CAMPO EFETIVO = $B + J \sum_{\substack{j \text{ É} \\ \text{VIZINHO DE } i}} \overline{\sigma_j}$

↑
VALOR MÉDIO

↓
FLUTUAÇÃO

FAZENDO $\sigma_k = \overline{\sigma_k} + \delta\sigma_k = m + \delta\sigma_k$

$$\Rightarrow \sigma_i \sigma_j = (m + \delta\sigma_i)(m + \delta\sigma_j) = m^2 + m(\delta\sigma_i + \delta\sigma_j) + \delta\sigma_i \delta\sigma_j$$

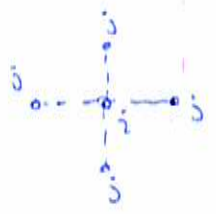
↑
DESPREZAR
(FLUTUAÇÃO)

$$= m^2 + m(\sigma_i - m + \sigma_j - m) = m\sigma_i + m\sigma_j - m^2$$

$$\Rightarrow H \approx -J \sum_{\substack{\text{PARES} \\ \langle ij \rangle}} (m\sigma_i + m\sigma_j - m^2) - \sum_i B\sigma_i = Jz \frac{N}{2} m^2 - (Jzm + B) \sum_i \sigma_i$$

OU SEJA $H = \text{cte} - (B + B_m) \sum_i \sigma_i$

CAMPO EFETIVO = CAMPO EXTERNO + CAMPO MOLECULAR MÉDIO PROPORCIONAL À MAGNETIZAÇÃO MÉDIA (CAMPO DE WEISS)



z SÁ OS i 'S VIZINHOS
 $z \equiv$ NR. DE COORDENAÇÃO (CONNECTIVIDADE DA REDE)
 = NR. DE j 'S QUE SÁ i 'S VIZINHOS

FUNÇÃO PARTIÇÃO

$$Z = \sum_{\text{CONFIG}} e^{-\beta E_{\text{config}}} = Z_1^N = \left(e^{-\beta \times \text{cte}} \right)^N \left(e^{\beta(B+B_m)} + e^{-\beta(B+B_m)} \right)^N$$

$$= Z_1^N (\text{cte})^N \cosh^N \beta(B + Jzm)$$

OU SEJA

$$Z \equiv Z(T, B, N, J, z, m)$$

↑
 PARÂMETROS
 MICROSCÓPICOS
 DA
 TEORIA

(ANÁLOGOS A

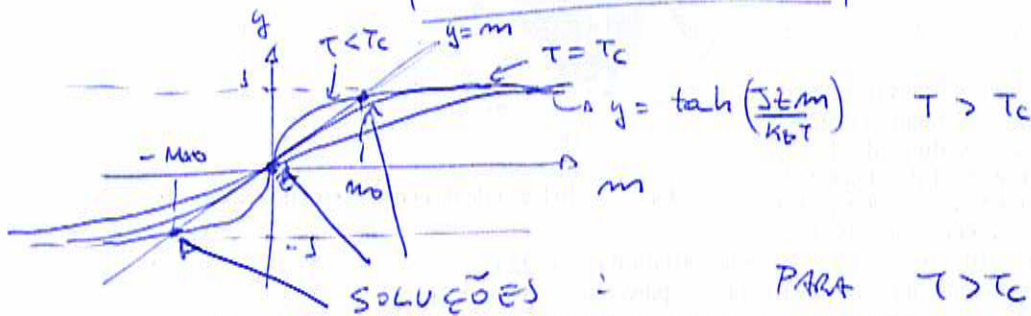
↑
 TAMBÉM DEPENDE
 DA
 MAGNETIZAÇÃO

MAS, $z \equiv z(T, B, N)$ como calcular m ? (6)

AUTO-CONSISTÊNCIA: $m = \frac{1}{N\beta} \sum_B \ln z$

$$m = \tanh \beta (Jz m + B)$$

CASO $B=0$: $m = \tanh \left(\frac{Jz m}{k_B T} \right)$



SOLUÇÕES: PARA $T > T_c \rightarrow$ ÚNICA SOLUÇÃO $m=0$

PARA $T < T_c \rightarrow$ 3 SOLUÇÕES

- QUA VACE T_c ?

A DERIVADA DE $\tanh \left(\frac{Jz m}{k_B T} \right) = 1$ QUANDO $T = T_c$

$$\Rightarrow \frac{Jz}{k_B T_c} * \frac{1}{\cosh^2 \frac{Jz m}{k_B T_c}} \Big|_{m=0} = 1 \Rightarrow \boxed{k_B T_c = Jz}$$

- QUANDO $T < T_c \rightarrow$ 3 SOLUÇÕES \rightarrow QUAS SÃO AS CORRETAS?

R: DE MENOR ENERGIA LIVRE

$$F = -k_B T \ln z = -k_B T N (\ln z + \ln \cosh \beta Jz m)$$

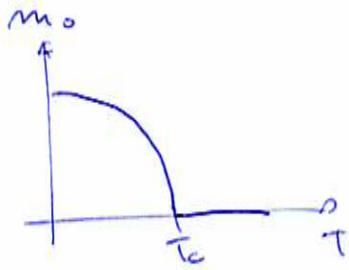
PARA $T > T_c \Rightarrow F = -N k_B T \ln z$

$T < T_c \Rightarrow F = -k_B T N (\ln z + \ln \cosh \beta Jz (\pm m_0)) < -N k_B T \ln z$

\Rightarrow ESTADO COM MAGNETIZAÇÃO $\pm m_0$ É PREFERÍVEL

PERTO DA TRANSIÇÃO $T \approx T_c$ TEMOS QUE

(7)



$$m_0 = \tanh\left(\frac{Jz m_0}{k_B T}\right) \quad \text{com } m_0 \ll 1$$

$$\approx \frac{Jz m_0}{k_B T} - \frac{1}{3} \left(\frac{Jz m_0}{k_B T}\right)^3 + O(m_0)^5$$

$$\Rightarrow J = \frac{Jz}{k_B} \times \frac{1}{T} - \frac{1}{3} \left(\frac{Jz}{k_B} \times \frac{1}{T}\right)^3 m_0^2$$

$$J = \frac{T_c}{T} - \frac{1}{3} \left(\frac{T_c}{T}\right)^3 m_0^2$$

$$\left(\frac{T_c}{T}\right)^3 m_0^2 = 3 \left(\frac{T_c}{T} - 1\right) = 3(-t) \Rightarrow m_0 = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{3(-t)}$$

PARA $T \approx T_c$ ($t \ll 1$) \Rightarrow $m_0 \sim (-t)^\beta$, $\beta = \frac{1}{2}$

SUSCEPTIBILIDADE MAGNÉTICA

$$\chi = \frac{\partial m_0}{\partial B} \Big|_{B=0} = \frac{\partial}{\partial B} \tanh \beta (Jz m_0 + B) = \frac{\beta}{\cosh^2 \beta (Jz m_0 + B)} \left(1 + Jz \chi\right)$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{\beta}{\cosh^2 \left(m_0 \frac{T_c}{T}\right)} \left(\beta + \frac{\beta}{\beta_c} \chi\right)$$

PARA $T \gg T_c$ ($m_0 \approx 0$) $\Rightarrow \chi = \beta + \frac{\beta}{\beta_c} \chi$

$$\Rightarrow \chi = \frac{\beta \beta_c}{\beta_c - \beta} = \frac{1}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_c}} = \frac{1}{k_B(T - T_c)} \sim T^{-\gamma}, \gamma = 1$$

PARA $T < T_c$ ($m_0 \ll 1$) $\Rightarrow \chi \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{T_c}{T} m_0\right)^2\right)^2 \approx \beta + \frac{\beta}{\beta_c} \chi$

$$\Rightarrow \chi \left(1 + \left(\frac{\beta}{\beta_c}\right)^2 m_0^2\right) = \beta + \frac{\beta}{\beta_c} \chi = \chi \left(1 + \left(\frac{\beta}{\beta_c}\right)^2 \times \left(\frac{\beta_c}{\beta}\right)^3 (-3t)\right)$$

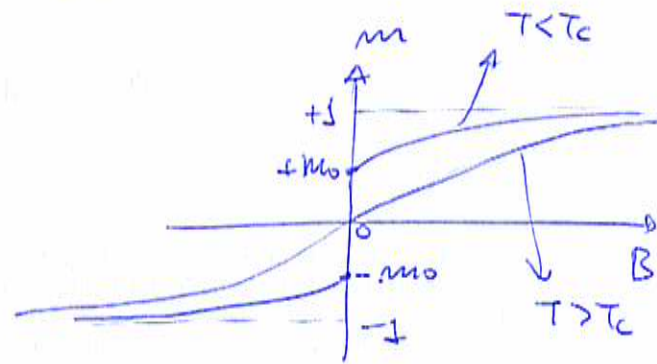
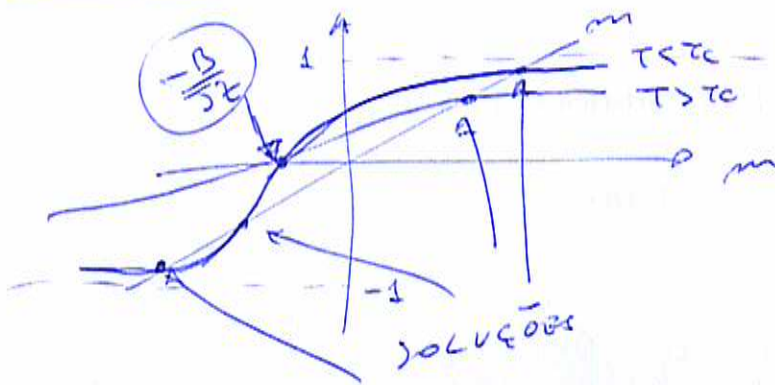
$$\beta \neq \frac{\beta}{\beta_c} \chi = \chi - 3 \frac{\beta_c}{\beta} t \chi \Rightarrow \beta \beta_c + \beta \chi = \beta \beta_c \chi - 3 \beta_c^2 t \chi$$

$$\chi = \frac{\beta \beta_c}{\beta_c - \beta - 3 \beta_c^2 t} = \frac{1}{\frac{1}{\beta_c} - \frac{1}{\beta} - \frac{3 \beta_c}{\beta} t} \sim \frac{1}{-2t} \sim (-t)^{-\gamma}, \gamma = 1$$

CASO $B \neq 0$

$$m = \tanh\left(\frac{J\tau m + B}{k_B T}\right)$$

(8)



como $m_0(T=T_c, B) \rightarrow 0$ QDD $B \rightarrow 0$?

$$m_0 = \tanh\left(\frac{J\tau m_0 + B}{k_B T_c}\right) = \tanh(m_0 + \beta_c B)$$

$$\approx m_0 + \beta_c B - \frac{1}{3} (m_0 + \beta_c B)^3$$

$$m_0 + \beta_c B = (3\beta_c B)^{1/3} \xrightarrow{B \rightarrow 0} m_0 \sim B^{1/3}, \delta = 3$$

NOTE QUE PARA $T < T_c \rightarrow$ TRANSIÇÃO DE FASE
FAZENDO $B \rightarrow 0^+$ e $B \rightarrow 0^-$
É DESCONTÍNUA EM m_0
 \rightarrow TRANSIÇÃO DE 1ª ORDEM

CLASSIFICAÇÃO DAS TRANSIÇÕES SEGUNDO EHRENFEST

A ORDEM DA TRANSIÇÃO É DADA PELA ORDEM EM QUE A DERIVADA DA ENERGIA LIVRE É DIVERGENTE

$$\left\{ \begin{array}{l} m = -\frac{\partial f}{\partial B} \\ \chi = -\frac{\partial^2 f}{\partial B^2} \end{array} \right. \quad S = -\frac{\partial f}{\partial T}$$

EM GERAL,
NAS TRANSIÇÕES DE 1ª
ORDEM \rightarrow ~~...~~
CALOR LATENTE
 $L = T_c \Delta S$

MINIMIZAÇÃO DA ENERGIA LIVRE

8.1

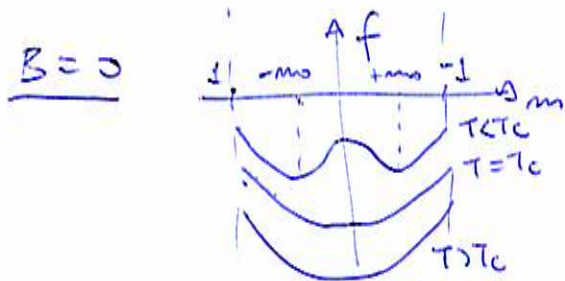
$$H \approx \frac{JzN}{2} m^2 - \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{CAMPO MOLECULAR}}}{Jz m + B}} \right) \sum_i \sigma_i \quad (\text{VIRE PG. 5})$$

$$\Rightarrow Z = e^{-\frac{\beta Jz}{2} N m^2} \times 2^N \cosh^N \beta (B + Jz m)$$

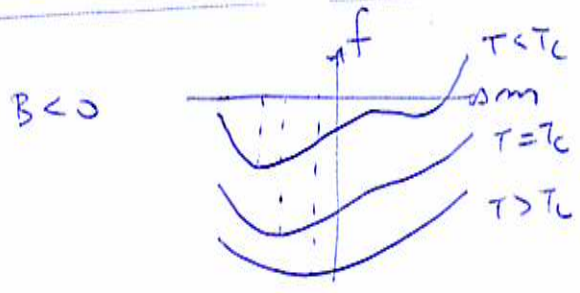
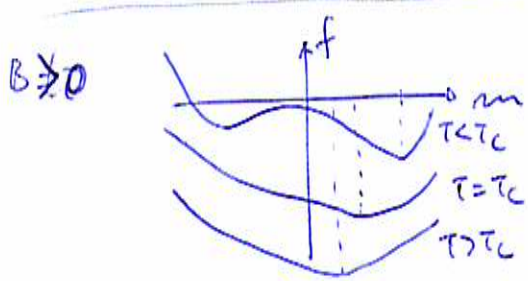
$$\Rightarrow f = \frac{F}{N} = -\frac{1}{N} k_B T \ln Z = \frac{Jz}{2} m^2 - k_B T \ln 2 - k_B T \ln(\cosh \beta(B + Jz m))$$

USANDO $k_B T_c = Jz$

$$\Rightarrow f = Jz \left(\frac{1}{2} m^2 - \frac{T}{T_c} \ln \left(\cosh \left(\frac{B}{k_B T} + \frac{T_c}{T} m \right) \right) - \frac{1}{T_c} \ln 2 \right)$$



PI $T < T_c \rightarrow$ 2 SOLUÇÕES DE MÍNIMO



APENAS UMA SOLUÇÃO ÓTIMA

CÁLCULO DA MAGNETIZAÇÃO ÓTIMA

$$\frac{\partial f}{\partial m} \Rightarrow \Rightarrow Jz \left(m - \frac{T}{T_c} \tanh \left(\frac{B + Jz m}{k_B T} \right) + \frac{Jz}{k_B T} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \tanh(\beta(B + Jz m))} \rightarrow \text{MESMO RESULTADO DA PG. 6}$$

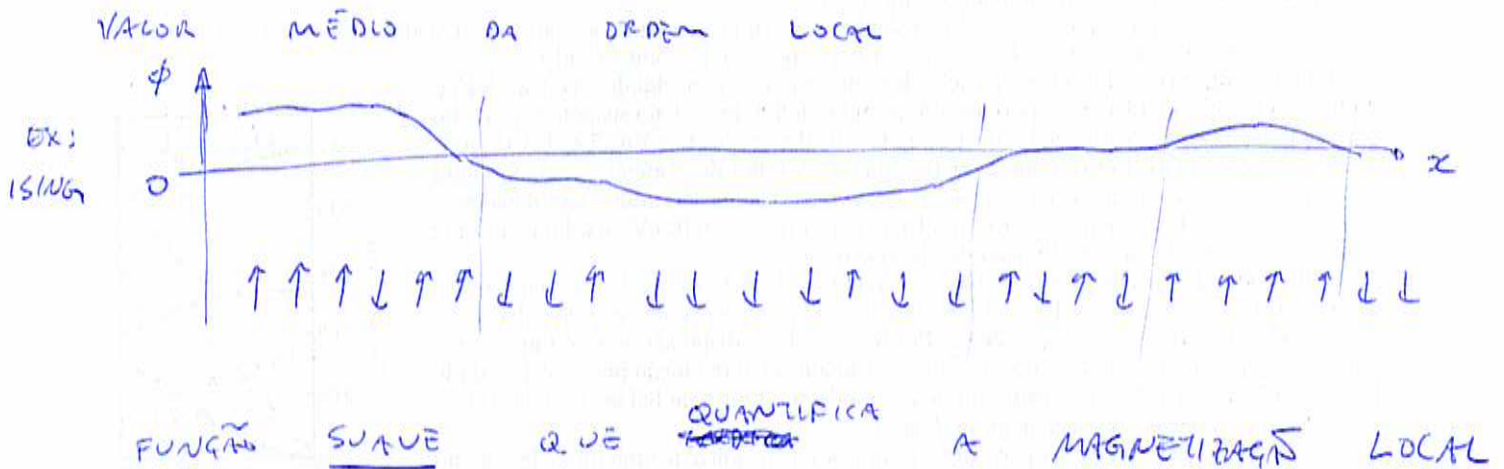
TEORIA DE LANDAU PARA TRANSIÇÕES DE FASE

(9)

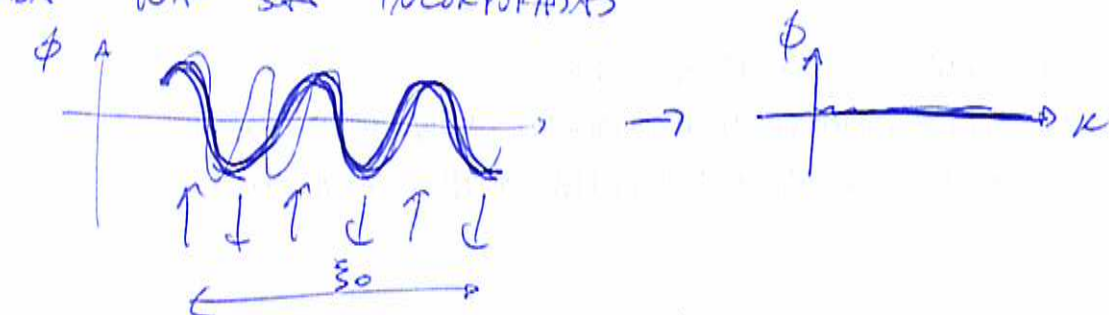
ASPECTOS IMPORTANTES:

- TEORIA GERAL (FORMALISMO GERAL) PARA TRANSIÇÕES DE FASE
- PARÂMETRO DE ORDEM
- A ENERGIA LIVRE É FUNÇÃO DO PARÂMETRO DE ORDEM TAL QUE O PARÂMETRO DE ORDEM MINIMIZA A ENERGIA LIVRE E A ENERGIA LIVRE É ANALÍTICA COMO FUNÇÃO DO PARÂMETRO DE ORDEM

PARÂMETRO DE ORDEM: $\vec{\phi}(\vec{x})$



- NOTE QUE FLUTUAÇÕES DE CURTO COMPRIMENTO DE ONDA NÃO SÃO INCORPORADAS



$$\phi(x) = \frac{1}{\xi_0} \sum_{i \in \xi_0} \sigma_i$$

$\xi_0 \equiv$ ESCALA DE COMPRIMENTO MICROSCÓPICA MAS MUITO MAIOR QUE 0

$$F \equiv F(T, V, N, B) \rightarrow F(T, V, N, B, \phi(\vec{r}))$$

FUNCIONAL DO PARÂMETRO DE ORDEM

HIPÓTESE: É POSSÍVEL EXPANDIR F EM POTÊNCIAS DE $\phi(\vec{r})$ PERTO DA TRANSIÇÃO ($\phi(\vec{r}) \ll 1$)

$$F = \int d\vec{r} \left\{ A - B(\vec{r})\phi(\vec{r}) + \frac{\mu}{2}\phi^2(\vec{r}) + \frac{m}{4}\phi^4(\vec{r}) + \frac{\xi_0^2}{2} |\nabla\phi(\vec{r})|^2 + \dots \right\}$$

$A \equiv$ CONSTANTE NA ENERGIA $\rightarrow 0$

$B(\vec{r}) \equiv$ CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO (CAMPO CONJUGADO AO PARÂMETRO DE ORDEM)

$\mu, m, \xi_0 \rightarrow$ CONSTANTES QUE DEPENDEM DO T, E OUTROS PARÂMETROS

MICROSCÓPICOS DA TEORIA COMO J (CONSTANTE DE ACOPLAMENTO) z (COORDENAÇÃO DA REDE)

Q^{to} VALE $\phi(\vec{r})$?

MINIMIZAREMOS FUNCIONAL DE $F = \int d\vec{r} f(\vec{r})$

EULER-LAGRANGE = $\frac{\partial f}{\partial \phi} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \nabla \phi} \right) = 0$

$$\left(-B + \mu\phi + m\phi^3 - \xi_0^2 \nabla^2 \phi = 0 \right)$$

COMO INTERPRETAR ESSA EQUAÇÃO?

É A SOLUÇÃO QUE MINIMIZA UM POTENCIAL

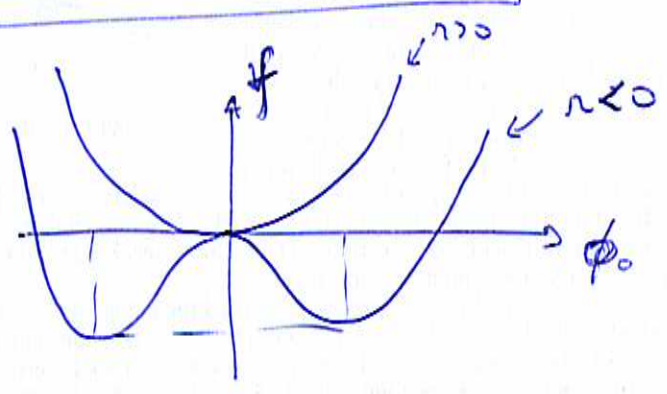
EXEMPLO: $\phi(\vec{r}) = \phi_0 = \text{cte}$ (CAMPO MÉDIO)

$$\Rightarrow -B + \mu \phi_0 + \lambda \phi_0^3 = 0$$

QUAL É O POTENCIAL CUJO MÍNIMO É DADO PELA SOLUÇÃO ACIMA?

$$\frac{F}{V} = f(\phi_0) = \frac{1}{2} \lambda \phi_0^2 + \frac{1}{4} \mu \phi_0^4 - B \phi_0$$

CASO $B=0$



Logo, $\lambda \phi_0 + \mu \phi_0^3 = 0 \Rightarrow \phi_0 = 0$ ou $\phi_0 = \pm \sqrt{\frac{-\lambda}{\mu}}$

QUANTO VALE A ENERGIA LIVRE?

↓
QUAL MÍNIMO ESCOLHER?

- QUEBRA ESP. SIMETRIA
- INVALIDADE DA HIPÓTESE ERGÓDICA NO LIMITE $N \rightarrow \infty$

$$f = \frac{F}{V} = \frac{1}{2} \lambda \phi_0^2 + \frac{\mu}{4} \phi_0^4 = \begin{cases} 0, & \lambda > 0 \\ -\frac{1}{4} \frac{\lambda^2}{\mu}, & \lambda < 0 \end{cases}$$

NÃO-ANALITICIDADE → MESMO APESAR DE F SER UM FUNCIONAL ANALÍTICO DE $\phi(\vec{r})$

$\lambda \equiv$ EQUIVALENTE À DISTÂNCIA À CRITICALIDADE

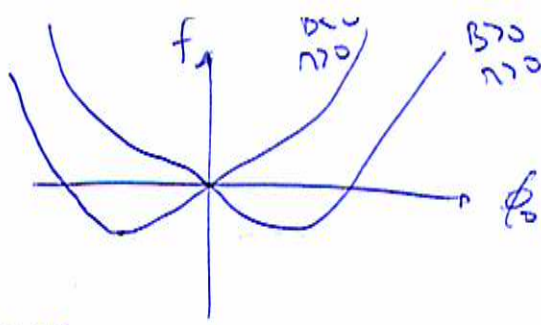
NA TEORIA DE CAMPO MÉDIO DE WEISS

$$\lambda \propto \frac{T - T_c}{T_c}$$

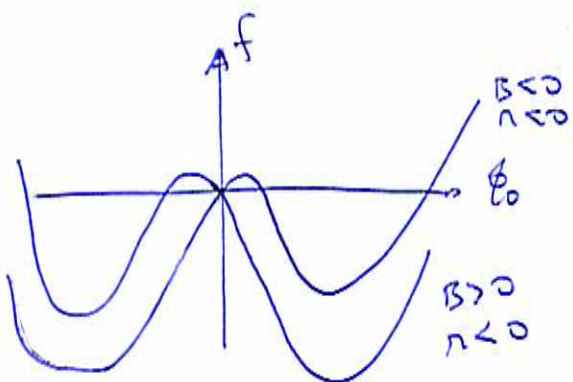
NOTE QUE $\phi_0 \sim (-\lambda)^\beta \sim (-t)^\beta$

com $\beta = 1/2$

Caso $B \neq 0$



(12)



$\rightarrow 3$ soluções \rightarrow $\begin{cases} \downarrow$ ESTÁVEL \\ \downarrow NÃO ESTÁVEL \\ \downarrow INSTÁVEL \end{cases}

SUSCEPTIBILIDADE: $\chi = \left. \frac{\partial \phi_0}{\partial B} \right|_{B \rightarrow 0}$

como $B = \mu \phi + \nu \phi^3 \Rightarrow \Delta = \nu \chi + 3\mu \phi_0^2 \chi$
 $\Rightarrow \chi = \frac{1}{\nu + 3\mu \phi_0^2} \sim \begin{cases} \frac{1}{\nu} & , \nu > 0 \\ \frac{-1}{2\nu} & , \nu < 0 \end{cases}$

como $\chi \sim |\nu|^{-\gamma} \Rightarrow \gamma = 1$

ISOTERMA CRÍTICA ($\nu = 0$)

$\Rightarrow \mu \phi_0^3 = B \Rightarrow \phi_0 = \left(\frac{B}{\mu}\right)^{1/3} \sim |B|^{1/3}, \delta = 3$

CALOR ESPECÍFICO ($B = 0$)

$C = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \sim -\pi \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = \begin{cases} 0, & \nu > 0 \\ \frac{\pi}{2\mu}, & \nu < 0 \end{cases}$

\rightarrow DESCONTINUIDADE DE C EM $T = T_c$

$C(T \rightarrow T_c^+) = 0 \rightarrow \alpha = 0$
 $C(T \rightarrow T_c^-) = \frac{T_c}{2\mu}$

RÉSUMINDO: FAZENDO $\vec{\phi}(z) \rightarrow \phi_0$, RECUPERA-SE OS

(13)

EXPOENTES CRÍTICOS DA TEÓ. DE CAMPO MÉDIO DE WEISS

- A TEÓ. DE LINDAU VAI ALÉM DE CAMPO MÉDIO POR INCORPORAR FLUTUAÇÕES.
HÁ COMO CALCULAR OS PARÂMETROS A, ν, μ, ξ_0 ?

R: SIM. DEPENDEM DO MODELO MICROSCÓPICO EM QUESTÃO

EXEMPLO: ISING: $H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - B \sum_i \sigma_i$

$\sigma_i = \langle \sigma_i \rangle + \delta \sigma_i =$ valor médio + flutuações

$\Rightarrow H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle + \langle \sigma_i \rangle \delta \sigma_j + \delta \sigma_i \langle \sigma_j \rangle + \delta \sigma_i \delta \sigma_j - B \sum_i \sigma_i$

$= -J \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle - 2J \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \sigma_j \rangle \sigma_i - B \sum_i \sigma_i$

$H = J \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle - \sum_i (B_{m,i} + B) \sigma_i$

ONDE $\sum_i B_{m,i} \sigma_i = 2J \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \sigma_j \rangle \sigma_i = J \sum_i \left(\sum_{j \in \text{viz}_i} \langle \sigma_j \rangle \right) \sigma_i$

$\Rightarrow B_{m,i} = J \sum_{j \in \text{viz}_i} \langle \sigma_j \rangle \equiv$ CAMPO MOLECULAR DE WEISS

FUNÇÃO PARTIÇÃO: $Z = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta H(\{\sigma_i\})} = e^{-\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle} \prod_i 2 \cosh \beta (B_{m,i} + B)$

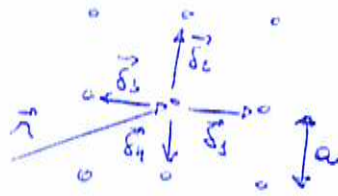
ENERGIA LIVRE: $f = \frac{F}{N} = \frac{1}{N} (-k_B T \ln Z) = \frac{-1}{\beta N} \ln Z$

$f = \sum_{\langle i,j \rangle} \frac{J \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle}{N} - \frac{1}{N} \sum_i \frac{\ln Z}{\beta} + \frac{1}{\beta} \ln \cosh \beta (B + B_{m,i})$

COMO RELACIONAR $\langle \sigma_i \rangle$ COM $\phi(\vec{r})$?

$$\sum_i \rightarrow \frac{1}{(\Delta r)^d} \int d\vec{r}$$

$$= \frac{1}{a^d} \int d\vec{r}$$



$\{\vec{\delta}_i\}$ = CONS. DE VETORES QUE CONECTAM OS 1ºS VIZINHOS

PI REDE CÚBICA $|\vec{\delta}_i| = a$

$$\sum_{\langle i,j \rangle} \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{2} \sum_i \langle \sigma_i \rangle \sum_{j \in \text{Viz. } i} \langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{2} \sum_i m(\vec{r}) \sum_{\{\vec{\delta}_i\}} m(\vec{r} + \vec{\delta}_i)$$

MAS $m(\vec{r} + \vec{\delta}_j) = m(\vec{r}) + \sum_k \delta_j^{(k)} \frac{\partial}{\partial r^{(k)}} m + \frac{1}{2} \sum_{k,p} \delta_j^{(k)} \delta_j^{(p)} \frac{\partial^2 m}{\partial r^{(k)} \partial r^{(p)}} + O(\delta^3)$

COMO SEMPRE HÁ UM $\vec{\delta}_j = -\vec{\delta}_k$

$$\Rightarrow \sum_{\{\vec{\delta}_i\}} m(\vec{r} + \vec{\delta}_j) = J m(\vec{r}) + a^2 \nabla^2 m$$

ANALOGAMENTE, $B_{m,i} = J m(\vec{r}) + J a^2 \nabla^2 m$

LOGO,

$$f = \frac{1}{N} \sum_i \left[\frac{1}{2} J m^2 + \frac{1}{2} J a^2 m \nabla^2 m - \frac{1}{\beta} \ln \cosh \beta (J m + J a^2 \nabla^2 m + B) \right] - \frac{\ln 2}{\beta}$$

EXPANDIR

$$\ln \cosh x \approx \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + O(x^6)$$

$$\frac{1}{2} \beta^2 (J^2 m^2 + 2 J J a^2 m \nabla^2 m + 2 J m B)$$

$$- \frac{\beta^4}{12} J^4 m^4 + O(\text{TERMOS SUPERIORES EM } m \text{ OU "CONSTANTES" } \propto B)$$

LOGO, AGRUPAMOS OS TERMOS

(15)

$$f = \frac{1}{N a^d} \int d\vec{n} \left\{ \frac{1}{2} J \tilde{J} \left(1 - \frac{J \tilde{J}}{k_B T} \right) m^2 + J a^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{J \tilde{J}}{k_B T} \right) m \nabla^2 m \right. \\ \left. + \frac{J \tilde{J}}{12} \left(\frac{J \tilde{J}}{k_B T} \right)^3 m^4 - \frac{J \tilde{J}}{k_B T} B m + \dots \right\}$$

PARA $T \approx T_c$, $\int m \nabla^2 m = m \cancel{\vec{n} \cdot \nabla} m - \int |\nabla m|^2$

$$f = \frac{J \tilde{J}}{N a^d} \int d\vec{n} \left\{ \frac{1}{2} \nu m^2(\vec{n}) + \frac{1}{2} \xi_0^2 |\nabla m|^2 + \frac{\mu}{4} m^4(\vec{n}) - \frac{B m}{J \tilde{J}} \right\}$$

ONDE $\left\{ \begin{array}{l} \nu = 1 - \frac{T_c}{T} \approx t \\ \xi_0^2 = \frac{1}{3} a^2 \end{array} \right.$

$\mu = \frac{1}{3}$

$\frac{B}{J \tilde{J}} = \text{CAMPO MAGNÉTICO EFETIVO}$

- NOTE QUE O TERMO m^4 GARANTE QUE A ENERGIA LIVRE TENHA UM MÍNIMO

- OS TERMOS DE MAIS ALTA ORDEM SÃO IRRELEVANTES PARA DETERMINAR AS SINGULARIDADES NO P. CRÍTICO