

Lista 1 - FCM0102

1. Recentemente [Nature 491, 207–211 (08 November 2012)], descobriu-se um planeta girando em torno da estrela α -Centauro B (que faz parte do sistema estelar mais próximo do nosso). Verificou-se que o período de translação desse planeta é de $T = 3,236$ dias. Sabe-se ainda que a massa dessa estrela é $M = 0.934M_{\odot}$, onde M_{\odot} é a massa solar.

- De posse desses dados, o que podemos concluir sobre o raio da órbita desse planeta?
- E sobre a massa do mesmo?

Dica: Suponha que a massa desse planeta é muito menor que a massa de sua estrela e que a órbita é circular.

Dados: O período de translação terrestre é de $\tau = 365,25$ dias, e a distância Terra-Sol é igual a $R = 1$ UA (unidade astronômica).

2. Duas partículas de massas m_1 e m_2 são soltas do repouso, separadas de uma distância inicial r_0 , movendo-se apenas sobre o efeito de sua atração gravitacional mútua. Após um certo intervalo de tempo, essas partículas se encontram separadas de uma distância $r < r_0$. Calcule as velocidades das duas partículas neste instante de tempo.

3. Considere um planeta hipotético de raio R e densidade constante ρ onde há um túnel que passa pelo centro do mesmo ligando dois pontos diametralmente opostos na sua superfície.

- Calcule o período de oscilação de uma partícula que cai do repouso nesse túnel.
- Calcule a velocidade com que essa partícula passaria pelo centro do planeta.
- Calcule a magnitude da força gravitacional planeta-partícula quando a partícula dista de $r < R$ do centro do planeta.

4. No mesmo planeta hipotético do problema anterior, há um satélite que orbita esse planeta numa órbita circular muito próxima da superfície do mesmo.

- Calcule o período dessa órbita e compare com o período encontrado no item 3(a).
- Calcule a velocidade do satélite nessa órbita e compare com a velocidade encontrada no item 3(b).
- Qual o valor dessas quantidades para o caso do planeta Terra?

5. Dentro de uma esfera de raio R e densidade ρ há uma cavidade de raio a cujo centro dista de d do centro da esfera (vide Fig. 1). Calcule o campo gravitacional (magnitude, direção e sentido) em um ponto qualquer dentro dessa cavidade.

6. Calcule a energia potencial gravitacional total associada a uma esfera homogênea de raio R e massa M .

7. Considere um fio retilíneo de massa M e comprimento L . Alinhado a esse fio, há uma partícula de massa m que dista de D da extremidade mais distante. Mostre que a força de atração gravitacional exercida pelo fio sobre a partícula é a mesma que se teria se a massa total do fio estivesse concentrada num único ponto (denominado de centro de gravidade), à distância d da partícula, onde $d = \sqrt{D(D-L)}$ é a média geométrica das distâncias da partícula às extremidades do fio.

8. Duas pequenas espaçonaves, ambas de massa $m = 2000$ kg, estão na mesma órbita circular em torno da Terra a uma altura de $h = 400$ km acima da superfície. Entretanto, a primeira nave comandada por Kirk está na frente e chega a qualquer ponto da órbita $\Delta t = 90$ s antes da segunda nave comandada por Picard.

- Determine o período T_0 e a velocidade v_0 das naves.

Entretanto, num determinado ponto P da órbita, Picard dispara um retrofogueto (de massa muito pequena) na direção tangencial da órbita, reduzindo a velocidade da nave em 1,00%. Depois do disparo, a nave de Picard assume uma órbita elíptica sendo o ponto P o apogeu da mesma.

- Determine a energia cinética e potencial gravitacional da nave imediatamente após o disparo.
- Na nova órbita elíptica, determine a energia total, o semieixo maior, e o novo período orbital T .
- Quanto tempo Picard chega antes de Kirk no ponto P ?
- Por quais razões o novo período T é menor que T_0 ?

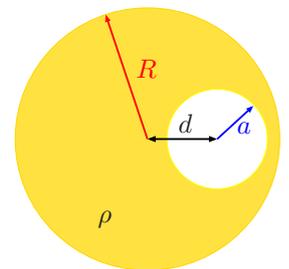


Figura 1: Esfera maciça com cavidade.

9. Em um sistema binário de estrelas, duas estrelas descrevem órbitas circulares em torno de seu centro de massa comum.

(a) Sendo as estrelas de massas m_1 e m_2 e separadas por uma distância r , mostre que $G(m_1 + m_2)T^2 = 4\pi^2 r^3$, onde T é o período orbital.

(b) Podemos reescrever esse resultado em termos do sistema Sol-Terra. Sendo M_\odot a massa solar, T_\oplus o período orbital da Terra em torno do Sol, e $R = 1$ UA o raio dessa órbita (circular), mostre que

$$\left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^2 = \left(\frac{M_\odot}{m_1 + m_2}\right) \left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Aplique esse resultado para o sistema binário Sirius A e B. Sabe-se que $m_{\text{SiriusA}} = 2,2 M_\odot$ e $m_{\text{SiriusB}} = 0,9 M_\odot$, e a separação do par é $r = 19,9$ UA. Finalmente, calcule os raios r_A e r_B das órbitas (circulares) dessas estrelas.

10. Imagine que uma partícula de massa M está sobre uma mesa perfeitamente plana e polida onde pode-se desprezar quaisquer forças dissipativas. Além disso, essa partícula está presa a uma mola de massa desprezível, constante elástica k e comprimento de repouso L cuja outra extremidade está presa a um pivô que pode girar livremente como ilustra a Fig. 2.

(a) A segunda lei de Kepler da gravitação (lei das áreas) é válida para o sistema massa-mola descrito acima? Justifique.

(b) E quanto a terceira lei de Kepler (lei dos períodos)? Qual é a lei equivalente para o sistema massa-mola? Ou seja, qual a relação entre o período T e o raio R da órbita? (Considere que $R \gg L$.)

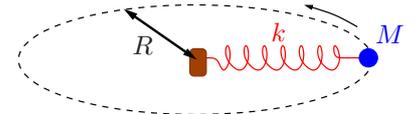


Figura 2: Sistema massa-mola.