Lista 4 - FCM0102

1. Uma partícula se move sobre um círculo de raio 15 cm e faz uma volta completa a cada 3 s.
(a) Qual a velocidade da partícula?
(b) Qual a sua velocidade angular ω?
(c) Escreva uma equação para o componente x da posição da partícula, em função de t, admitindo que a partícula esteja a 45° no primeiro quadrante no instante $t = 0$.
(d) Faça o gráfico de $x(t)$ e identifique no mesmo a amplitude e a fase do movimento.
(e) Calcule a velocidade $v(t)$ e a grafique junto com o gráfico de $x(t)$. Identifique a fase relativa entre x e v.
(e) Calcule a aceleração $a(t)$ e a grafique junto com o gráfico de $x(t)$. Identifique a fase relativa entre x e a.

2. Neste problema, vamos deduzir a expressão da potência média injetada por uma força excitadora num oscilador harmônico forçado unidimensional.
(a) A equação do movimento para o oscilador harmônico unidimensional forçado é $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$. Identifique o significado físico de cada um dos 4 termos dessa equação.
(b) Mostre que $x(t) = x_h(t) + A\cos(\Omega t + \delta)$ é solução da equação do movimento onde $x_h(t)$ (cuja exata expressão não é importante aqui) é solução da equação $m\ddot{x}_h + b\dot{x}_h + kx_h = 0$, e A e δ são constantes iguais a

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + b^2\Omega^2}}, \text{ e } \tan\delta = \frac{b\Omega}{m\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)}, \text{ com } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

(c) Qual é a interpretação física de $x_h(t)$, A e δ? Lembre-se que $x_h(t \gg \tau) \to 0$. Quanto vale τ?
(d) Mostre que, após um transiente ($t \gg \tau$), a potência instantânea da força excitadora é dada por

$$P(t) = F\dot{x} = -A\Omega F_0 \cos(\Omega t)\sin(\Omega t + \delta) = -\frac{1}{2}A\Omega F_0\left[\sin(\delta) + \sin(2\Omega t + \delta)\right].$$

Dica: $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.
(e) Finalmente, mostre que o valor médio da potência instantânea é

$$\overline{P} = -\frac{1}{2}A\Omega F_0 \sin(\delta),$$

onde $\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\mathrm{d}t$, e $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ é o período da oscilação.
(f) Finalmente, mostre que

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\frac{b\Omega^2 F_0^2}{m^2\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + b^2\Omega^2} = \frac{F_0^2}{2m\omega_0} \times \frac{Q}{1 + \left[Q\left(\alpha - \alpha^{-1}\right)\right]^2}, \tag{1}$$

onde $\alpha = \frac{\Omega}{\omega_0}$ e $Q = \frac{m\omega_0}{b}$ é o fator de qualidade. A Fig. 1 mostra o valor de $\overline{P}$ como função de α para 3 valores distintos de Q. Note que a potência dissipada se torna uma função cada vez mais estreita (em torno da frequência de ressonância ω_0) conforme o fator de qualidade aumenta.

3. A largura de uma curva de ressonância $\Delta\Omega$ é definida como a diferença entre as frequências máximas e mínimas quando a potência dissipada é metade do valor da potência máxima (como ilustra a Fig. 1 para o caso de $Q = 2$). Comumente, diz-se que essa é a largura a meia altura.

Vamos usar os resultados do problema anterior para mostrar que há uma relação muito simples entre essa largura e o fator de qualidade dada por $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$ quando a ressonância é aguda. Na ressonância, o denominador da Eq. (1) é $b^2\Omega^2 = b^2\omega_0^2$ e $\overline{P}$ tem o seu valor máximo. Numa ressonância aguda, a variação de Ω no numerador da Eq. (1) é muito pequena (ou seja, $\Delta\Omega \ll \omega_0$) e pode ser desprezada. Evidentemente, a potência é a metade do seu valor máximo nos valores de Ω para os quais se possa escrever $2b^2\Omega^2$ como o valor do denominador.

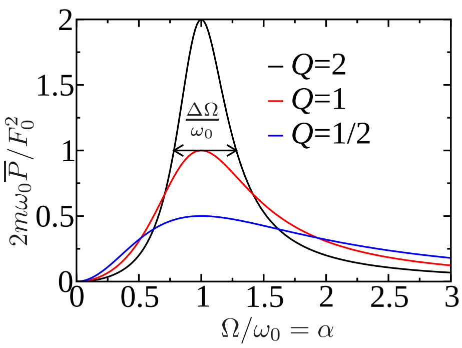

Figura 1: Potência média $\overline{P}$ como função da frequência de oscilação da força externa Ω para 3 valores diferentes de fator de qualidade Q. (Note que para valores altos de Q, a curva é bem estreita.)

(a) Mostrar que nestas circunstâncias, Ω obedece a

$$m^2\left(\Omega-\omega_0\right)^2\left(\Omega+\omega_0\right)^2=b^2\omega_0^2.$$

(b) Com a aproximação $\Omega+\omega_0=2\omega_0$, mostrar que

$$\Omega-\omega_0\approx\pm\frac{b}{2m}.$$

(c) Usando a definição $Q=2\pi\frac{E}{\Delta E}=2\pi\frac{m}{bT}=2\pi\frac{\tau}{T}$, mostre que Q está relacionado a b e a m por

$$Q=\frac{m\omega_0}{b}.$$

(d) Combinar os resultados de (b) e de (c) para mostrar que existem dois valores de Ω para os quais a potência é igual à metade da potência na ressonância e que estes dois valores são

$$\Omega_1=\omega_0-\frac{\omega_0}{2Q},\ \text{e}\ \Omega_2=\omega_0+\frac{\omega_0}{2Q}.$$

Então, $\Omega_2-\Omega_1=\Delta\Omega=\frac{\omega_0}{Q}$ o que é equivalente à equação $Q=\frac{\omega_0}{\Delta\Omega}=\frac{f_0}{\Delta f}$.

4. Um oscilador amortecido tem uma frequência ω que é 10% menor que a frequência do oscilador sem amortecimento.
(a) Qual o fator de decréscimo da amplitude em cada oscilação?
(b) Qual o fator de redução da energia em cada oscilação?

5. Um túnel retilíneo é perfurado na terra, como mostra a Fig. 2. Vamos desprezar quaisquer forças dissipativas.
(a) Mostre que a força resultante que atua sobre uma partícula de massa m à distância x do centro do túnel é dada por $F_x=-kx$, onde $k=(GmM_T/R_T^3)$, G é a constante gravitacional, M_T é a massa da Terra, e R_T o seu raio.
(b) Mostre que o período do movimento é $T=2\pi(R_T/g)^{\frac{1}{2}}$ e ache o seu valor. (Este também é o período de um satélite em órbita nas vizinhanças da superfície da terra e é independente do tamanho do túnel.)

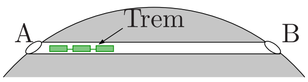

Figura 2: Túnel planetário.

(c) Suponha que esse túnel ligue duas cidades conhecidas por você. Qual a aceleração máxima que a partícula experimenta durante a viagem?
(d) Suponha que haja uma força viscosa atuando na partícula igual a $F_{\text{visc}}=-b\dot{x}$ onde $b=100\,\text{kg/s}$. Para que valores de massa o movimento é sub-amortecido?
(e) Um trem sem motor de $m=80\,\text{ton}$ entra nesse túnel com velocidade nula está sujeito à força viscosa do item anterior. Em quanto tempo ele chega ao centro do túnel?

6. Um pêndulo simples de comprimento L parte do repouso com um ângulo inicial com a vertical igual a θ_0.
(a) Com a hipótese de o movimento ser harmônico simples, ache a a velocidade do pêndulo quando ele passa por $\theta=0$.
(b) Com a conservação da energia, achar exatamente esta velocidade.
(c) Mostrar que os resultados das partes (a) e (b) se tornam aproximadamente iguais quando θ_0 for pequeno.
(d) Achar a diferença nos dois resultados quando $\theta_0=0{,}20\,\text{rad}$ e $L=1\,\text{m}$.

7. Um relógio de pêndulo simples é ajustado de modo a ter um andamento exato quando a amplitude angular for $\theta_0=10°$. Quando a amplitude tiver diminuído até o ponto de ser muito pequena, de quanto adianta o relógio em um dia?
Correções para o período em oscilações de amplitudes maiores é dada por $T=T_0\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\dots\right)$.

8. Considere um corpo plano como ilustra a Fig. 3. O momento de inércia desse corpo em relação a um eixo que é perpendicular ao plano do mesmo e atravessa o seu centro de massa é conhecido e igual a I_{CM}. Quando esse corpo oscila em torno de um eixo perpendicular ao plano do mesmo e que atravessa o ponto P_1 (que dista de h_1 do centro de massa), nota-se que o período de oscilação (para pequenas oscilações) é T.

Existe um segundo ponto P_2, a uma distância $h_2 \neq h_1$ do centro de massa, tal que, se posto para oscilar por um eixo perpendicular ao plano do corpo e que atravessa esse ponto P_2, o período de pequenas oscilações também é T.

Mostre que $h_1 + h_2 = gT^2/4\pi^2$.

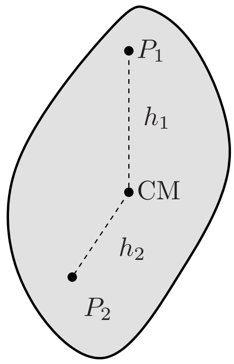

Figura 3: Pêndulo físico.

9. Uma aranha, de massa 0,36 g, desce por um fio que cede 3,00 mm por causa de seu peso.

(a) Um certo inseto que passava por perto imprime um pequeno deslocamento vertical na aranha que passa a oscilar verticalmente. Desprezando quaisquer forças dissipativas, estime a frequência de vibração.

(b) Mostre que o movimento da aranha é um movimento harmônico simples em torno da posição de equilíbrio 3,00 mm. Dica: escreva a energia mecânica do sistema e note que ela é igual a de um oscilador harmônico simples com a origem deslocada.

10. A aceleração da gravidade g varia com a localização sobre a superfície da Terra em virtude da rotação da Terra e também por a Terra não ser exatamente esférica e homogênea. Esta variação foi descoberta no século XVII, quando se percebeu que um relógio de pêndulo, cuidadosamente regulado para manter a medição correta do tempo em Paris, perdia cerca de 90 s/dia nas vizinhanças do equador.

(a) Mostrar que uma pequena variação da aceleração da gravidade Δg provoca uma pequena variação ΔT no período de um pêndulo, dada por $\Delta T/T \approx -(\Delta g/2g)$. (Usar diferenciais para aproximar ΔT e Δg.)

(b) Qual a variação de g que provoca a variação de 90 s/dia no período do pêndulo?

11. Um pêndulo simples de comprimento L está preso a um carrinho de massa muito grande que desce um plano inclinado, sem atrito, que forma um ângulo θ com a horizontal. Determine a frequência de pequenas oscilações para esse pêndulo.

12. Um pêndulo é constituído de uma barra muito fina de massa desprezível e comprimento ℓ e de uma esfera de raio R (com $R \ll \ell$) e massa m. A uma distância $\alpha\ell$ (com $0 < \alpha < 1$) do eixo de rotação, anexa-se uma mola muito grande, de massa desprezível, e de constante elástica k que está em equilíbrio com a posição de repouso ($\theta = 0$) do pêndulo (vide Fig. 4). O sistema é então posto para oscilar. Para as perguntas que se seguem, considere o limite de pequenas oscilações ($\theta \ll 1$).

(a) Calcule a energia mecânica do sistema.

(b) Comparando com a energia mecânica de um oscilador harmônico $E = A\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right) + B$ (onde os valores de$A$ e B são irrelevantes aqui, exceto pelo fato de que $A > 0$), calcule a frequência angular ω correspondente.

(c) Escreva a equação de movimento para o ângulo θ.

(d) Calcule a frequência angular ω correspondente e compare com a resposta do item (a).

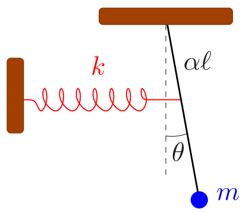

Figure 4: Sistema pêndulo-mola.

(e) Suponha agora que o sistema se encontre imerso em um líquido de viscosidade η proporcionando uma força sobre a esfera igual a $\vec{F}_{\mathrm{visc}} = -6\pi\eta R\vec{v}$, onde $\vec{v}$ é o vetor velocidade da esfera. Qual é a nova equação de movimento para o ângulo θ?