Lista 6 - FCM0102

1. Duas fontes puntiformes A e B que emitem ondas harmônicas em fase estão separadas por uma distância d conforme ilustra a Fig. 1. Percebe-se um padrão de interferência sobre um anteparo paralelo à reta suporte das fontes e situada à distância D, bastante grande, de cada fonte (vide Fig. 1).

(a) Mostrar que a diferença de percurso das duas fontes a um ponto sobre o anteparo, fazendo o ângulo θ com a vertical, é dada aproximadamente por

$$\Delta x = d \sin \theta.$$

(b) Mostrar que a distância y_m entre o máximo central e o m-ésimo máximo a vertical, é dada aproximadamente por

$$y_m = m \frac{D\lambda}{d}.$$

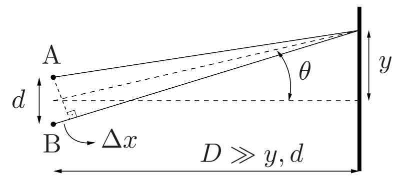

Figura 1: Interferência entre duas fontes.

Considere agora que essas fontes emitem ondas sonoras e distam de $D = 2\,\text{m}$ de um anteparo. Observa-se pela primeira vez a interferência construtiva sob um ângulo $\theta_1 = 0,140\,\text{rad}$ e depois sob o ângulo $\theta_1 = 0,283\,\text{rad}$.

(c) Qual o comprimento de onda das ondas sonoras emitidas pelas fontes?

(d) Qual a frequência destas fontes?

(e) Em que outros ângulos se perceberá também a interferência construtiva?

(f) Qual o menor ângulo para o qual as ondas sonoras se cancelam completamente?

2. As funções de onda de duas ondas estacionárias, numa corda de comprimento L, são

$$y_1(x,t) = A_1 \cos(\omega_1 t) \sin(k_1 x) \;\text{ e }\; y_2(x,t) = A_2 \cos(\omega_2 t) \sin(k_2 x),$$

onde $k_n = n\pi/L$ e $\omega_n = n\omega_1$. A função de onda da onda resultante é $y_r(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$.

(a) Ache a velocidade de um segmento dx da corda situado a uma distância x da origem.

(b) Ache a energia cinética deste segmento.

(c) Por integração, achar a energia cinética total de onda resultante. Observar a desaparecimento dos termos com os produtos cruzados, de modo que a energia cinética total é proporcional a $(n_1 A_1)^2 + (n_2 A_2)^2$.

(d) Por que a energia cinética total não é constante no tempo? Quanto vale a energia total do sistema? Justifique.

3. Três ondas de mesma frequência ω, mesmo comprimento de onda k e mesma amplitude A estão se deslocando numa mesma direção. A fase da primeira onda é zero, a da segunda onda é ϕ, e a da terceira onda é $-\phi$. Ache a frequência, comprimento de onda, amplitude e fase da onda resultante.

4. Dois pulsos ondulatórios em movimento numa corda estão representados pelas funções de onda

$$y_1(x,t) = \frac{0{,}02}{2 + (x - 2t)^2} \;\text{ e }\; y_2(x,t) = \frac{-0{,}02}{2 + (x + 2t)^2},$$

onde x e y estão em metros e t em segundos.

(a) Desenhar cada uma das funções de onda, separadamente, em função de x no instante $t = 0$, e descrever o comportamento de cada uma delas à medida que o tempo passa.

(b) Achar a função de onda resultante em $t = 0$.

(c) Achar a função de onda resultante em $t = 1\,\text{s}$.

(d) Desenhar a função de onda resultante no instante $t = 1\,\text{s}$.

5. Uma corda uniforme, de $20\,\text{m}$ de comprimento e massa de $2\,\text{kg}$, está esticada sob uma tensão de $10\,\text{N}$. No instante $t_0 = 0$, faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com amplitude de $3\,\text{cm}$ e frequência de cinco oscilações por segundo. O deslocamento inicial da extremidade é para cima.

(a) Ache a velocidade de propagação v e comprimento de onda λ da onda progressiva gerada na corda.

(b) Escreva, como função de tempo t, o deslocamento transversal y de um ponto da corda situado à distância x da extremidade. Considere apenas tempos tais que $t_0 < t < t_0 + \Delta t$, onde Δt é o intervalo de tempo que leva para que o primeiro pulso chegue na outra extremidade da corda.

(c) Calcule a potência da onda progressiva gerada.

6. A mesma corda descrita no problema anterior está com uma extremidade amarrada num poste. A outra, inicialmente em repouso na posição de equilíbrio, é deslocada de 10 cm para cima, com velocidade uniforme, entre 0 e 0,5 s. A seguir, é deslocada para baixo, com a magnitude da velocidade reduzida à metade da anterior até retornar à posição de equilíbrio. Desenhe a forma da corda nos instantes 1,7 s, 2,6 s, 3,8 s, e 4,5 s.

7. Dois estudantes, cada qual com um diapasão de 440 Hz, afastam-se um do outro com velocidades iguais (em relação ao ar tranquilo). Qual deve ser a velocidade de cada um para que ouçam uma frequência de batimento de 2 Hz?

8. Um túnel reto em uma montanha amplifica grandemente sons de 135 e de 138 Hz. Determine o menor comprimento possível do túnel.

9. O tubo de Kundt (vide Fig. 2), que costumava ser empregado para medir a velocidade do som em gases, é um tubo de vidro que contém o gás, fechado em ambas extremidades. Em uma delas, pode-se acolpar, por exemplo, um alto-falante onde uma onda sonora de frequência ν conhecida excita ondas estacionárias no tubo. A outra extremidade é um pistão que se faz deslizar, variando o comprimento do tubo. O tubo contém um pó fino (serragem, por exemplo). Ajusta-se o comprimento do tubo até que ele entre em ressonância com a frequência ν, o que se nota pelo reforço da intensidade sonora emitida. Observa-se então que o pó fica acumulado em montículos igualmente espaçados, de espaçamento $\Delta\ell$ (veja figura), que se pode medir.

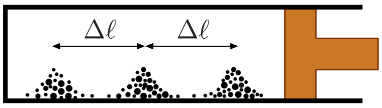

Figura 2: Desenho esquemático do tubo de Kundt.

(a) A que correspondem as posições dos topos dos montículos? Haverá montículos nas extremidades do tubo?
(b) Qual é a relação entre $\Delta\ell$, ν e a velocidade do som no gás v_g?
(c) Com o tubo cheio de CO_2 a 20 °C e $\nu = 880$ Hz, o espaçamento médio medido é de 15,2 cm. Qual é a velocidade do som correspondente?

10. Uma onda matematicamente não patológica pode ser escrita como uma superposição de ondas harmônicas de diferentes frequências. Considere a função definida por

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\cos\left(2n+1\right)x}{2n+1} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots\right).$$

É interessante aproximar essa soma infinita por uma soma finita, ou seja, vamos considerar que a soma vá de 0 até k.
(a) No computador, grafique essa função para os valores de x entre 0 e 4π, e para valores de $k = 0$, 1, 2, 10 e 100.
(b) Analisando os gráficos do item anterior, qual é a onda (função) obtida da soma infinita?
(c) Qual é a relação entre esta função e a série de Leibnitz para o π,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots?$$