Lista 7 - FCM0102

1. A velocidade de escape num corpo celeste de raio R, é $v_{\mathrm{e}} = \sqrt{2gR}$, onde g é a aceleração da gravidade na sua superfície. Se a velocidade v_{rms} de um gás for superior que aproximadamente 15% de v_{e}, então o gás eventualmente acaba escapando.

(a) Em que temperatura a v_{rms} do gás O_2 é igual à 15% da velocidade de escape na Terra?

(b) A que temperatura a v_{rms} do gás H_2 é igual à 15% da velocidade de escape na Terra?

(c) As temperaturas na atmosfera su perior da Terra chegam a $10^3\,\mathrm{K}$. Como este fato ajuda a explicar a baixa abundância do hidrogênio em nossa atmosfera? (A temperatura na superfície da Lua pode chegar a 127 °C.)

(d) Calcular as temperaturas em que as velocidades médias quadráticas dos gases O_2 e H_2 são iguais à 15% da velocidade de escape na superfície da lua, onde $g_{\mathrm{Lua}} \approx \frac{1}{6} g_{\mathrm{Terra}}$ e $R_{\mathrm{Lua}} = 1\,738\,\mathrm{km}$. Como os resultados obtidos explicam a ausência de atmosfera na lua?

(e) Em Júpiter, $v_e \approx 60\,\mathrm{km/s}$ e a temperatura na parte superior de sua atmosfera é de cerca de $-150\,°\mathrm{C}$. O que você conclui sobre o aprisionamento de H_2 nesse planeta?

(f) E para o caso do Sol, onde a temperatura em sua superfície é em torno de $6\,000\,\mathrm{K}$?

2. Um termômetro a gás, de volume constante, com a pressão no ponto triplo da água igual a 500 torr, é usado para medir o ponto de ebulição de uma substância. Quando o termômetro está em equilíbrio com a substância ebuliente, a sua pressão é 734 torr. Parte do gás do termômetro é então evacuada, de modo que a pressão no ponto triplo seja 200 torr. Quando o termômetro fica, novamente, em equilíbrio com a substância em ebulição, a sua pressão é $293,4$ torr. Uma outra vez, parte do gás do termômetro é evacuada, de modo que a pressão no ponto triplo se reduz a 100 torr. Quando em contato térmico com a substância ebuliente, o termômetro indica a pressão de $146,65$ torr. Achar a temperatura (de gás ideal) da substância ebuliente.

3. Um mergulhador está a 40 m da superfície de um lago, onde a temperatura é 5 °C, e libera um bolha de ar com o volume de $15\,\mathrm{cm}^3$. A bolha sobe até a superfície, onde a temperatura é de 25 °C.

(a) Qual o volume da bolha, na superfície, antes de romper a água superficial?

(b) Imagine agora que queremos usar essa bolha como um balão (como os cientistas fazem com os balões de Hélio metereológicos). Qual a carga útil essa bolha suportaria no início de sua jornada? E no final?

(c) Qual (ou quais) é a semelhança e diferença entre esse fenômeno e aquele dos balões de Hélio subindo na atmosfera?

4. Mostrar que a função

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \tag{1}$$

tem um máximo em $v_{\mathrm{moda}} = \sqrt{2kT/m}$.

5. Uma vez que $f(v)\,\mathrm{d}v$ dá a fração de moléculas que têm as velocidades no intervalo entre v e $v + \mathrm{d}v$. A integral de $f(v)\,\mathrm{d}v$ sobre todas as velocidades possíveis deve ser igual à unidade. Dada a integral

$$\int_0^\infty v^2 e^{-av^2} \mathrm{d}v = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-\frac{3}{2}},$$

mostrar que $\int_0^\infty f(v)\,\mathrm{d}v = 1$, onde $f(v)$ está dada pela Eq. (1).

6. Dada a integral $\int_0^\infty v^3 e^{-av^2} \mathrm{d}v = \frac{1}{2a^2}$, calcular a velocidade média $\overline{v}$ das moléculas de um gás mediante a função de distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann Eq. (1).

7. O livre percursso médio em Hélio gasoso é de $1{,}862 \times 10^{-5}\,\mathrm{cm}$ a 1 atm e 15 °C.

(a) Calcule o diâmetro efetivo de um átomo de Hélio.

(b) Estime o número médio de colisões por segundo que um átomo de Hélio sofre nessas condições.

8. Um cilindro fechado, vertical, está dividido ao meio por um pistão fino, isolante, pesado, que pode se mover sem atrito, cuja massa é m_p e sua área é A. A parte de cima contém nitrogênio na temperatura T sob pressão P .

A parte de baixo está cheia com oxigênio na temperatura $2T$. O cilindro é revirado de ponta-cabeça. Para o pistão continuar no meio do cilindro, o oxigênio tem que ser resfriado à temperatura $T/3$, com a temperatura do nitrogênio mantida em T . Calcular a pressão inicial do oxigênio em termos de m_p e A.

9. Um cilindro contém uma mistura gasosa de N_2 e H_2. Numa determinada temperatura T, o Nitrogênio está completamente dissociado e a pressão no cilindro é P. Se a temperatura for elevada para $2T$, a pressão fica triplicada em virtude da dissociação completa do Hidrogênio. Sendo a massa total de Hidrogênio dentro do cilindro igual à m_H, calcule a massa total da mistura gasosa contida no mesmo.

10. Um cilindro semi-aberto de altura L está cheio com n moles de um gás ideal em temperatura T. Coloca-se então um pistão de massa M na parte de cima do cilindro como ilustra a Fig. 1. Para as perguntas que se seguem, assuma que esse pistão desliza sem atrito, que a temperatura do gás não muda durante esse processo, e que a aceleração da gravidade é g.

(a) Calcule a altura de equilíbrio do pistão y_{eq} em relação ao fundo do mesmo.

(b) Empurrando o pistão de Δy para baixo (com $\Delta y \ll y_{\text{eq}}$) e soltando-o do repouso no instante $t = 0$, calcule a trajetória subsequente do pistão $y(t)$.

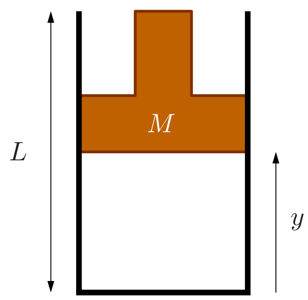

Figura 1: Sistema cilíndro-pistão.

11. (DESAFIO) Considere um cilíndro muito longo de altura L e de área transversal A contendo um gás ideal em temperatura constante imerso num campo gravitacional constante de aceleração g.

(a) Mostre que a pressão P varia com a altura h (medida em relação ao fundo do cilíndro) é igual à

$$P = P_{\text{hidrostática}} \left(\frac{e^{-\frac{mgh}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{mgL}{k_B T}}} \right), \tag{2}$$

onde $P_{\text{hidrostática}} = \frac{Nmg}{A}$, $N \gg 1$ é o número total de moléculas do gás contidas no cilíndro (cada qual de massa m).

Para isso, siga os seguintes passos:

(i) Usando o que aprendemos de equilíbrio hidrostático num fluido na primeira parte do curso, calcule a força resultante sobre uma camada do gás de espessura dh localizada a uma altura h da superfície, e mostre que

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}h} = -m\rho g, \tag{3}$$

onde $\rho \equiv \rho(h)$ é a densidade de moléculas do gás na altura h. (Não confunda com a densidade de massa que é igual à $m\rho$).

(ii) Para relacionar a densidade de partículas ρ com a pressão P, use o fato de que a temperatura é constante nessa fina camada de gás e, portanto, a lei dos gases ideais pode ser usada dentro dessa camada.

(iii) Substitua a relação encontrada no item (ii) na Eq. (3). Após uma simples integração, mostre que

$$P(h) = \text{const} \times e^{-\frac{mgh}{k_B T}},$$

onde a const é uma constante de integração. Para calculá-la, use que o número total de moléculas é dado por

$$N = \int_0^L \rho(h) A \mathrm{dh},$$

onde deve-se usar a relação obtida em (ii) para resolver a constante. Uma vez encontrada, a Eq. (2) deve ser obtida.

(b) Mostre que a Eq. (2) se reduz à equação dos gases ideias no limite $mgL \ll k_B T$. Como esse limite se compara para o gás contido na sala em que você se encontra?

(c) No limite oposto $mgL \gg k_B T$, mostre que $P \approx P_{\text{hidrostática}} e^{-\frac{mgh}{k_B T}}$. Essa é lei de Halley. [Note que essa lei o ajuda a entender o problema **3**(c).]