Lista 8 - FCM0221

1. Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ três vetores quaisquer $\in \Re^3$. Mostre que

   (a) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, e que esta quantidade é o volume do paralelepípedo formado pelos três vetores,

   (b) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$,

   (c) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$.

2. Um dipolo elétrico é um par de cargas pontuais iguais mas de sinais opostos, $+q$ e $-q$, que estão separadas por uma distância fixa d. (Imagine uma barra de comprimento d muito fina de massa desprezível e perfeitamente rígida com as cargas elétricas localizadas em suas extremidades.) O momento de dipolo elétrico $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ é uma quantidade vetorial onde o vetor $\mathbf{d}$ aponta de $-q$ para $+q$ e tem módulo igual a d. Considere um dipolo elétrico situado num campo elétrico $\mathbf{E}$ uniforme.

   (a) Mostre que a resultante das forças elétricas aplicadas ao dipolo é nula, mas que o torque resultante é dado por $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ (em relação à qualquer ponto de um referencial inercial).

   (b) Mostre que a energia de dipolo no campo é dada por $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$. Identifique as situações de equilíbrio estável e instável do dipolo no campo. (Lembre-se que a força elétrica sobre uma carga pontual Q num campo elétrico $\mathbf{E}$ é $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$.)

3. Dois discos A e B estão conectados por um correia que não desliza. O raio do primeiro é 3 vezes maior que o do segundo. Qual é a razão entre os momentos de inércia $I_\mathrm{A}/I_\mathrm{B}$ quando eles têm

   (a) o mesmo momento angular em relação aos respectivos eixos centrais e

   (b) a mesma energia cinética de rotação?

4. Dois patinadores de massas iguais a 60 kg, deslizando sobre uma pista de gelo com atrito desprezível, aproximam-se um do outro com velocidades iguais e opostas de 5,0 m/s, segundo retas paralelas, separadas por uma distância de 1,40 m.

   (a) Calcule o vetor momento angular do sistema e mostre que é o mesmo em relação a qualquer outro ponto e se conserva.

   (b) Quando os patinadores chegam a 1,40 m um do outro, estendem os braços e dão-se as mãos, passando a girar em torno do CM comum. Calcule a velocidade angular de rotação.

5. No modelo de Bohr do átomo de hidrogênio, o elétron, de carga $-e$ (onde $e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$) e massa $m = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, descreve órbitas circulares em torno do próton, de carga $+e$ e massa $1\,840m$. Com muito boa aproximação, podemos considerar o próton como sendo o CM do sistema. A única força é a atração Coulombiana. A hipótese básica de Bohr foi que a magnitude ℓ do momento angular do elétron não pode assumir qualquer valor, mas valores quantizados iguais a

$$\ell_n = n\hbar, \text{ onde } n \in \mathbb{N}^* \text{ e } \hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$$

   é a constante de Planck dividida por 2π.

   (a) Calcule o raio de Bohr r_1 da órbita com $n = 1$, e exprima o raio r_n da órbita associada com ℓ_n em função de r_1.

   (b) Calcule, em eV, a energia E_1 da órbita com $n = 1$, e exprima E_n em função de E_1.

   (c) Calcule a razão v_1/c da velocidade do elétron na órbita com $n = 1$ para a velocidade da luz c.

6. Uma cápsula espacial cilíndrica gira a 6,0 rpm em torno de seu eixo de simetria. Os ocupantes desejam cessar essa rotação e, para tanto, dispõem de 2 pequenos jatos montados tangencialmente na estrutura externa da cápsula que tem raio de 3,0 m. Cada um dos jatos dispara 10 g/s de gás a uma velocidade de 800 m/s na direção perpendicular ao eixo de rotação. Por quanto tempo os jatos devem ser acionados de modo a anular rotação. Considere que o momento de inércia da cápsula permaneça constante durante o processo e igual a 4,0 ton$\cdot$m^2.

7. Dois discos homogêneos de massas m_1 e m_2 e raios R_1 e R_2 giram sem atrito sobre o mesmo mancal com velocidades angulares $\omega_1\hat{z}$ e $\omega_2\hat{z}$, onde o eixo do mancal está alinhado com o eixo $\hat{z}$. Os discos são aproximados e após algum tempo, devido à força de atrito entre suas superfícies, passam a girar com a mesma velocidade angular. Calcule essa velocidade.

8. Um projétil de massa m move-se livremente no plano xy conforme sendo o seu vetor posição dado por $\mathbf{r} = (-3R + v_0 t)\,\hat{x} - b\hat{y}$. No plano xy há também um disco homogêneo de raio $R > b$ e massa M cujo centro se encontra na origem dos eixos e que pode girar livremente em torno de um eixo perpendicular ao plano xy que atravessa o seu centro.

   (a) Em que instante de tempo ocorre o impacto entre o disco e o projétil?

   (b) Calcule $\mathbf{L}_\mathrm{A}$, o momento angular total do disco e do projétil antes do impacto em relação à origem dos eixos.

   (c) Qual a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do sistema disco+projétil logo após o impacto? (Considere que o projétil fique incrustado no disco.)

   (d) Qual é o valor da energia mecânica perdida durante essa colisão?

9. Uma barra uniforme e muito fina de tamanho L e massa M se encontra sobre uma superfície horizontal perfeitamente lisa alinhada ao longo do eixo y com seu centro na origem do plano de coordenadas xy. Uma partícula de massa m cuja posição é dada pelo vetor $\mathbf{r} = (-L + v_0 t)\,\hat{x} - d\hat{y}$ se propaga em rota de colisão com a barra $(0 < d < \frac{1}{2}L)$.

   (a) Em que instante de tempo ocorre a colisão?

   (b) Considerando que a colisão é totalmente inelástica, descreva precisamente o movimento subsequente do sistema. (Calcule os vetores velocidade do centro de massa e momento angular, etc.)

   (c) Considerando que a colisão é elástica, determine o valor de d para que a partícula fique parada após a colisão.

10. Uma semi-esfera de raio R e massa M que se encontra sobre uma superfície horizontal fixa com sua face plana voltada para baixo em contato com a superfície. Uma esfera maciça de raio $r < R$ e massa m é então colocada cuidadosamente no topo da semi-esfera. Inevitavelmente, a esfera começa a rolar sem deslizar sobre a semi-esfera. Sendo g a aceleração da gravidade, responda:

    (a) Considerando que a semi-esfera está fixa, calcule quantas voltas a esfera dá sobre si mesma antes de perder o contato com a semi-esfera.

    (b) Responda a pergunta anterior considerando que a semi-esfera desliza sem atrito sobre a superfície.

       i. Calcule a magnitude das velocidades dos centros de massa da semi-esfera e da esfera nesse instante, bem como a magnitude da velocidade angular da esfera.

11. Um pião gira 30 rev/s em torno de um eixo que faz um ângulo de 30° com a vertical. A massa do pião é de 0,50 kg, o momento de inércia em relação ao eixo central é de $5{,}0\times10^{-4}$ kg·m^2 e o centro de massa está a 4,0 cm de distância do ponto de apoio. Se a rotação é no sentido horário quando o pião é visto de cima, qual é

    (a) a taxa de precessão e

    (b) o sentido da precessão quando o pião é visto de cima?