Anstaz de Bethe: modelo de Lieb-Liniger

Jhonny Richard Huamani Chaviguri

Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, Brasil.

Resumo

Neste trabalho se apresenta um resumo sucinto de como foi desenvolvido a hipótese de Bethe para resolver o magneto de Heisemberg, além de numerar algumas das suas aplicações. Também, se monstra, em particular, sua aplicação na resolução do Modelo unidimensional de Lieb-Liniger para $N = 2$, a qual é resolvida em forma exata no caso do estado fundamental.

I. INTRODUÇÃO

Diversos sistemas unidimensionais estudados na física de matéria condensada, incluindo bósons e férmions, são resolvidas exatamente [1, 2]. Um dos métodos usualmente empregado para resolver este tipo de sistemas é o bem conhecido *ansatz* de Bethe, ou hipótese de Bethe.

No seu trabalho pioneiro, Bethe introduz sua hipótese para resolver o problema da cadeia unidimensional de spins-1/2 interagentes do modelo de Heisemberg [3]. Devido ao sucesso na resolução desse problema, o *ansatz* foi amplamente usado na resolução de multiplos problemas, em especial casos em uma dimensão, tais como o antiferromagnetismo por Hulthén [4], no modelo de Bose-Hubbard [5], no modelo de Gaudin-Yang [6, 7], entre outros.

Um modelo interessante resolvido através do *anstaz* de Bethe foi o gás unidimensional de bósons interagentes, o qual foi estudado por Lieb e Liniger (LL) [8, 9]. Eles conseguiram determinar o espectro de energia e a função de onda do sistema. Um caso particular que surge deste modelo é o gás de Tonks-Girardeu [10, 11], o que é um gás de bósons infinitamente repulsivo.

Este trabalho está focado principalmente na solução do modelo de Lieb-Liniger de dois bósons, isto é, determinar o espectro de energia e a função de onda correspondente. Além disso, é importante indicar que este trabalho está elaborado com base nos seguintes artigos, livros e palestras [12–18].

O trabalho está organizado da seguinte forma: Na seção II se aborda o surgimento da hipótese de Bethe, enquanto que na seção III é desenvolvido em forma detalhada o modelo de LL para dois bósons presentes no sistema, concluímos o trabalho na seção IV.

II. HIPÓTESE DE BETHE

Na atualidade o *ansatz* de Bethe é um tópico muito estudado devido a sua aplicação em diversas áreas da física, tais como física de matéria condensada, teoria de campos, entre outros.

Esta técnica consiste em determinar a função de onda e dispersão via a resolução dos autovalores e autovetores do sistema em estudo. Isto indica que se deve construir uma função de onda que englobe todos os estados do sistema, uma combinação linear (superposição) de ondas. O seguinte passo é determinar as amplitudes de probabilidade para cada estado em particular a partir da onda total.

Bethe foi capaz de determinar essa função de onda e sua respetiva amplitude intuitivamente, somando sobre as diferentes permutações que o sistema pode ter, e o mais importante, limitar essas interações para uma interação de dois corpos.

Fisicamente, esta estrutura de funções de onda superpostas significa que o sistema é integrável, isto é, o sistema admite um conjunto completo de integrais de movimento, isto é, presenta grandezas conservadas.

As aplicações, como já foi dito anteriormente, estão focadas na resolução de sistemas físicos unidimensionais, como por exemplo:

- Modelo antiferromagnético, estudado por Hulthén.
- Modelo de Bose-Hubbard (interação de elétrons correlacionados em uma banda de energia estreita), estudado por Lieb e Wu [19].

- Modelo de férmions (spin-1/2) interagentes, estudados por Gaudin e Yang.

A. Formulação matemática

Seja um sistema unidimensional composto de N partículas idênticas, neste caso a cadeia de spins de Heisemberg.

$$\hat{H} = J \sum_{i=1}^{N} \hat{S}_i \cdot \hat{S}_{i+1},$$

onde $J(< 0)$ representa a energia de acoplamento, e $\hat{S}_i$ são os operadores de spin.
Considera-se que o sistema é fechado para evitar efeitos de borda, de modo que o sistema tenda a ser um anel. Esta configuração em particular é vantajosa porque simplifica a aplicação das condições de contorno que o sistema pode ter. Neste caso as condições a serem impostas são periódicas.

Seja o estado função de onda total da forma

$$\Psi = \sum_{m_1,\ldots,m_i}^{N} \alpha(m_1,\ldots,m_i)\psi(m_1,\ldots,m_i), \tag{1}$$

onde α e $\psi(m_1,\ldots,m_i)$ representam a amplitude e o estado onde os spins podem ser trocados, respetivamente. O dominio de validade é dado por $m_1 < \ldots < m_i$, e $i \in [1, N]$, sendo m_i números associados com os spins.

Ao determinar a função de onda total $\Psi(m_1,\ldots,m_i)$, se observa que o spin de cada função de onda individual $\psi_i(m_1,\ldots,m_i)$ pode ser trocada através do seu "momento associado" k_i. De modo que ao construir a função de onda total, se deve tomar em consideração todas as permutações possíveis. Tomando em conta esta característica, derivam-se as amplitudes

$$\alpha(m_1,\ldots,m_n) = \sum_{P} A_P e^{\sum_{i=1}^{n} i k_{P_i} m_i}, \tag{2}$$

onde P abrange todas as permutações. A forma do parâmetro A_P dependerá do problema a ser estudado.

Nota-se que a amplitude está composta de multiplas fases que dependem do vetor de onda k_i. Este resultado é importante por que permitirá, após aplicação das condições de contorno periódicas, estabelecer um conjunto de equações interdependentes chamada equações de Bethe. As soluções dessas equações levam à determinação da função de onda total e o espectro de energia.

III. MODELO DE LIEB-LINIGER

Este modelo consiste de um gás unidimensional de bósons sem spin que interagem de forma repulsiva por meio de um potencial de contato. O modelo foi estudado e resolvido exatamente por Lieb e Liniger em 1963. A importância desse modelo radica na sua aplicação na área dos átomos frios, tanto em forma teórica como experimental. Neste último tópico, alguns casos têm sido observados experimentalmente: gás de Tonks-Girardeau [20, 21], gás 1D de bósons [22, 23].

A. Modelo LL para N bósons

Sejam N bósons interagentes ao longo de uma linha de tamanho L descritos a través do Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + g \sum_{i<j}^{N} \delta(x_i - x_j), \tag{3}$$

onde $g(> 0)$ representa o acoplamento repulsivo entre os bósons, $[g] = JL^{-1}$, e as coordenadas satisfazem o dominio de validade $1 < x_1, \ldots, x_N < L$.

O primeiro termo representa a energia cinética, enquanto que o segundo indica a energia potencial de contato de alcance-zero agindo somente entre dois vizinhos.
Nota-se que esse Hamiltoniano não tem uma energia potencial associada a cada sítio, pois o potencial de contato repulsivo faz com que os bósons se repilam com maior intensidade; em outras palavras, a velocidade de espalhamento dos bósons é predominante.

Considerando E como a energia total do sistema, tem-se a equação de autovalores

$$H_N \Psi(x_1, \ldots, x_N) = E_N \Psi(x_1, \ldots, x_N), \tag{4}$$

onde $\Psi(x_1, \ldots, x_N)$ representa a função de onda total, a qual é contínua em todo o espaço.

A presença da função delta no Hamiltoniano faz com que a derivada da função de onda tenha uma descontinuidade no ponto $x_i \to x_j$, mas este fato leva a satisfazer a equação ou condição de contorno de Helmholtz

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Psi(x_1, \ldots, x_N)|_{x_i \to x_j \pm \varepsilon} = n\gamma \Psi(x_1, \ldots, x_N)|_{x_i \to x_j \pm \varepsilon}, \tag{5}$$

com $\varepsilon(\to 0)$ sendo uma variação infinitesimal da coordenada onde será avaliada a função de onda. Além disso, com $\gamma = mg/n\hbar^2$ sendo o parâmetro adimensional de LL e $n = N/L$ a densidade atômica.
Esta relação implica, embora não necessariamente, uma condição de contorno periódica no sistema, isto é, o sistema pode ser considerado como um anel (sistema fechado), que satisfaz

$$\Psi(0, \ldots, x_i, x_j \ldots, x_N) = \Psi(L, \ldots, x_i, x_j \ldots, x_N), \tag{6}$$

para todo x_i, x_j.
Contudo, a condição de periodicidade no sistema pode ser imposta sem necessidade da descontinuidade na derivada da função de onda.

Considerando o *anstaz* de Bethe (neste caso considera-se a amplitude como se fosse a função de onda), Eq. (2), como a função de onda total que descreve o sistema

$$\Psi(x_1, \ldots, x_N) = \sum_P A_P e^{\sum_{i=1}^N i k_{P_i} x_i}. \tag{7}$$

Aplicando a condição de Helmholtz, deriva-se o parâmetro que depende das permutações

$$A_P = \epsilon_P \prod_{i<j} (k_{P_i} - k_{P_j} + in\gamma), \tag{8}$$

onde $\epsilon_P = \pm 1$, quando P é uma permutação ou ímpar, respetivamente.

Aplicando as condições de periodicidade, Eq.(6), na Eq. (8), obtêm-se um conjunto de N equações transcendentais para cada pseudo-momentum k_i

$$e^{ik_i L} = \prod_{i \neq j} \left(\frac{k_i - k_j + in\gamma}{k_i - k_j - in\gamma}\right). \tag{9}$$

Esta relação é conhecida como as equações de Bethe, e sua solução implica resolver o sistema em forma exata.
A dispersão e momento que satisfazem essa última relação são

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N k_i^2, \tag{10a}$$

$$P = \hbar \sum_{i=1}^N k_i. \tag{10b}$$

Como é notado, as duas últimas relações representam a energia e momento total do sistema, respectivamente.
A função de onda é determinada explicitamente resolvendo a equação de Bethe.

B. Modelo LL para N=2 bósons

Nesta seção será desenvolvida em forma explícita o caso de 2 bósons. Expandindo o Hamiltoniano, Eq. (3), para $N = 2$, obtém-se

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] + g\delta(x_1 - x_2). \tag{11}$$

Aplicando a Eq. (5), no limite $\varepsilon \to 0$ tem-se

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Psi(x_1, x_2)|_{x_1 \to x_2} = n\gamma\Psi(x_1, x_2)|_{x_1 \to x_2}. \tag{12}$$

Expresando a função de onda total, Eq. (7), para $N = 2$

$$\Psi(x_1, x_2) = A_{12}e^{i(k_1x_1 + k_2x_2)} + A_{21}e^{i(k_2x_1 + k_1x_2)}, \tag{13}$$

com dominio de validade $1 < x_1 < x_2 < L$.

Por um lado, aplicando a função de onda, Eq. (13), na condição de continuidade, Eq. (12), deriva-se

$$\frac{A_{12}}{A_{21}} = \frac{i(k_2 - k_1) + n\gamma}{i(k_2 - k_1) - n\gamma} = \beta, \tag{14}$$

onde β é uma constante de proporcionalidade complexa.
A relacão anterior pode ser experesada como

$$\frac{A_{12}}{A_{21}} = e^{i\theta(\bar{k})},$$

onde $\theta(\bar{k}) = 2\arctan(\bar{k}/n\gamma)$, e $\bar{k} = k_2 - k_1$. Nota-se que os parâmetros de permutação se comportam como uma fase, correspondendo a um deslocamento da fase principal da função de onda.

Por outro lado, aplicando as condições de fase periódica, Eq. (6) para $\Psi(0, x_2) = \Psi(L, x_2)$ e $\Psi(x_1, 0) = \Psi(x_1, L)$, simultaneamente na Eq. (13), se deduzem

$$e^{ik_1L} = \frac{i(k_2 - k_1) + n\gamma}{i(k_2 - k_1) - n\gamma}, \tag{15a}$$

$$e^{ik_2L} = \frac{i(k_2 - k_1) - n\gamma}{i(k_2 - k_1) + n\gamma}, \tag{15b}$$

onde foi omitida a solução trivial $e^{ik_{1,2}L} = 1$.

Usando as relações (15a) e (15b) para colocar em evidência o acoplamento repulsivo de contato, na Eq. (14) deriva-se

$$g(\bar{k}) = \frac{\hbar^2}{m}\bar{k}\tan\left(\frac{\bar{k}L}{4}\right). \tag{16}$$

Para $\bar{k} \ll 1$, ou seja $k_2 \ll k_1$, quer dizer que o primeiro bóson não "sente" a presença do segundo bóson, pois seu comprimento de onda ($\bar{k} \sim 1/\lambda$) é muito pequeno. Como consequencia disso, a energia de repulsão relativa é quadrática

$$g(\bar{k})L \approx \frac{\hbar^2}{4m}(\bar{k}L)^2$$

A energia e momemto do sistema são dados por

$$\frac{E}{N} = \frac{\hbar^2}{4m}(k_1^2 + k_2^2), \tag{17a}$$

$$\frac{P}{N} = \frac{\hbar}{2}(k_1 + k_2). \tag{17b}$$

$$\tag{17c}$$

Conhecendo os valores dos momentums k_1 e k_2 pode-se achar uma relação entre o parâmetro adimensional de LL e a energia total do sistema.

Substituindo a expresão que relaciona os coeficientes das permutações, Eq. (14), na Eq. (13), consegue-se

$$\Psi(x_1, x_2) = \beta\left[i(k_2 - k_1)\left(e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} + e^{i(k_2x_1+k_1x_2)}\right) + n\gamma\left(e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} - e^{i(k_2x_1+k_1x_2)}\right)\right], \tag{18}$$

a função de onda total.

Como uma aproximação para determinar a função de onda e o espectro de energia, é importante considerar o comportamento do sistema no estado fundamental. No estado fundamental se conserva o momento, de modo que $P = 0$ implica $k_1 = -k_2 = k$.

Uma consequência direta de considerar o estado fundamental, implica reescrever o acoplamento repulsivo de contato, Eq.(16), como

$$g(k) = \frac{2\hbar^2}{m} k \tan\left(\frac{kL}{2}\right). \tag{19}$$

Na Fig. 1 se observa que o dominio de validade do pseudo-momento k varia desde $-\pi/L < k < \pi/L$, tendo como limites $k = \pm\pi/L$ superior e inferior, respetivamente; onde justamente g diverge. Porém, o acoplamento é repulsivo (g é positivo), de modo que ele está limitado no corte superior de k. Quando k alcança o limite superior, o g atinge seu maximo valor, isto é $g \to \infty$. Este limite descreve o conhecido gás de Tonks-Girardeau, no qual os bósons são tão repulsivos entre sim que cada sítio é ocupado somente por um deles; eles se comportam como fermions não interagentes. Este limite também é chamado de núcleo duro de bósons.

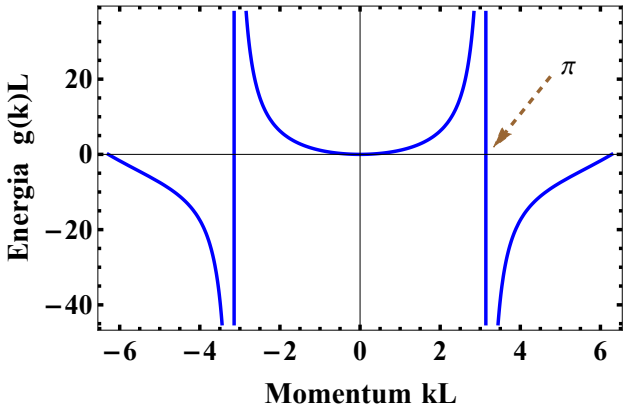

Figura 1: Comportamento do pseudo potencial de contato, onde o pseudo momento está limitado na primeira zona de Brillouin $k \in \langle -\pi/L, \pi/L\rangle$. No limite $k = \pi/L$, a energia do sistema se torna constante, pois substituindo este valor na Eq. (17a), tem-se $E/N = \hbar^2\pi^2/2mL^2$. Também se observa o comportamento parabólico para k pequeno.

Substituindo o novo momento na Eq. (18)

$$\begin{aligned}\Psi(x_1, x_2) &= \beta\left[2ik\left(e^{ik(x_2-x_1)} + e^{-ik(x_2-x_2)}\right) + n\sigma\left(e^{ik(x_2-x_1)} - e^{-ik(x_2-x_1)}\right)\right], \\ &= i\beta\{4k\cos[k(x_2 - x_1)] + 2n\gamma\sin[k(x_2 - x_1)]\} \\ \Psi(x) &= i\beta[4k\cos(kx) + 2n\gamma\sin(kx)],\end{aligned} \tag{20}$$

com $x = (x_2 - x_1)$ sendo a distância relativa entre dois sítios. Dentro do dominio de validade nota-se que $x > 0$. Para garantir essa condição se impõe $x \equiv |x|$; além diso, seja $c = i\beta$, uma constante arbitrária. Assim,

$$\Psi(x) = c[4k\cos(k|x|) + 2n\gamma\sin(kx)] \tag{21}$$

Substituindo o valor do parametro adimensional de LL da Eq. (19) em (21), se consegue

$$\Psi(x) = c[4k\cos(k|x|) + 4k\tan(kL/2)\sin(kx)].$$

Fazendo uso das propriedades trigonómetricas, tem-se

$$\Psi(x) = \frac{4kc}{\cos(kL/2)} \cos[k(|x| - L/2)]. \tag{22}$$

Normalizando a função de onda no espaço, onde a coordenada espacial satizfaz $x \in [0, L]$, em concordância com o limite do momento k. Além disso, como $x > 0$, o valor absoluto é eliminado e a integral fica simples de resolver. Então, deriva-se

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sqrt{\frac{2kL}{2kL + \sin(kL)}} \cos[k(|x| - L/2)]. \tag{23a}$$

A função de onda tem um comportamento ondulatório, dado pela função trigonométrica, e modulada pela amplitude dependente do momento k. Nota-se que em $k = 0$, a função de onda diverge, para evitar essa inconsistência, se expande a amplitude considerando kL pequeno, desse modo

$$\Psi(x) \approx \sqrt{\frac{2}{3L}} \cos[k(|x| - L/2)]. \tag{23b}$$

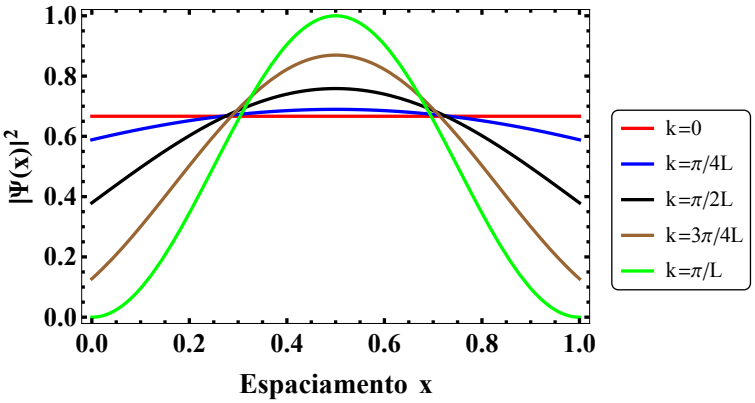

Figura 2: Amplitude de probabilidade determinados usando as Eq. (23a) e Eq. (23b), esta última é usada para obter a curva vermelha. Somente foi considerado o dominio positivo da distância relativa, $x \in [0, 1]$, pois é esperado um comportamento similar no limite oposto ($x \in [-1, 0]$) por conta da simetria, e tomando em conta que $|x| = -x$ para $x < 0$, isto é, o argumento fica deslocado para esquerda $k(|x| - L/2) \to k(x + L/2)$.

A Fig. 2 mostra o comportamento da amplitude de probabilidade da função onda para diferentes valores do momento k. O gráfico pode ser analisado em termos do comprimento de onda ($k \sim 1/\lambda$). A medida que o comprimento de onda aumenta, os bósons são menos repelidos e a probabilidade dele ser encontrado "perto" do seu vizinho aumenta. Em contraste, se o comprimento de onda diminui, os bósons se repelem afastando se mais um dos outros; e no caso extremo cada sitio é ocupado por um único bóson. Aqui, a probabilidade de que ambos estejam pertos é muito pequena ($k = \pi/L$).

a energia total do sistema fica simplesmente, dada a Eq. (17a),

$$\frac{E}{N} = \frac{\hbar^2}{2m} k^2, \tag{24}$$

tendo um comportamento quadrático típico.

Levando em conta a dependência com respeito ao momento k tanto da energia total E/N como do acoplamento repulsivo g, pode se inferir o comportamento da energia total respeito do acoplamento g. A fim de observar tal comportamento, foi elaborado uma tabela (cuadro I).

A partir dos valores da segunda e terceira coluna do cuadro I, se consegue a figura 3

A Fig. 3 mostra como a energia E não aumenta significativamente, e mais, começa a se estabilizar perto do valor 10, que é o limite infinitamente interagente. A energia tem um comportamento atenuado, e isto deve-se principalmente ao termo tagente presente em g. Este comportamento quer dizer que os bosóns alcançam uma energia estável a medida que sua repulsão aumenta.

k	g/c	E/Nc
0	0	0
$\pi/6$	0.28	0.27
$\pi/4$	0.65	0.62
$\pi/2$	3,14	2.47
$3\pi/4$	11.38	5.61
$5\pi/6$	19.55	6.86
$0{,}99\pi$	395.97	9.67

Cuadro I: Valores para o momento k, acoplamento repulsivo g/c e a energia E/Nc, respetivamente. Onde o dominio de k é $0, \pi$. Tanto g como E/N estão normalizados respeito do parâmetro $c(=\hbar^2/m)$, e além disso foi asumido $L = 1$ por comodidade.

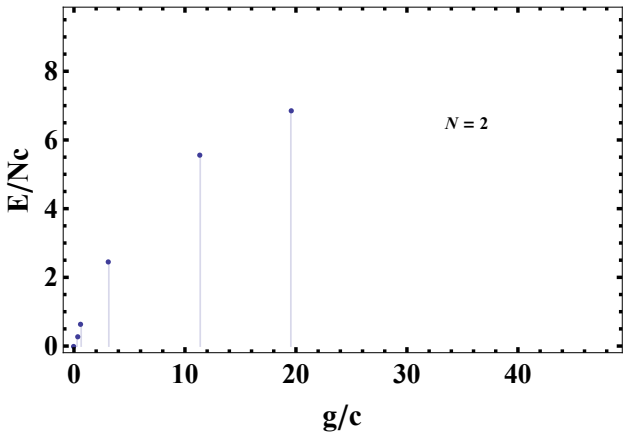

Figura 3: Relacão discreta entre a energia total e acoplamento repulsivo de contato.

C. Modelo LL para N=3

Nesta parte usou-se os resultados de Takahashi [24]. Seja a funçaõ de onda, Eq. (7),

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = A_{123}e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)} + A_{213}e^{i(k_2x_1+k_1x_2+k_3x_3)} + A_{132}e^{i(k_1x_1+k_3x_2+k_2x_3)} + A_{321}e^{i(k_3x_1+k_2x_2+k_1x_3)} + A_{231}e^{i(k_2x_1+k_3x_2+k_1x_3)} + A_{312}e^{i(k_3x_1+k_1x_2+k_2x_3)}, \tag{25}$$

com dominio de validade $x_1 < x_2 < x_3$.

Aplicando a condição de continuidade, Eq. (5), para cada x_i, se derivam as 6 combinações possíveis

$$\begin{aligned}
A_{123}/A_{213} &= -(k_1 - k_2 + in\gamma)/(k_1 - k_2 - in\gamma),\\
A_{123}/A_{132} &= -(k_2 - k_3 + in\gamma)/(k_2 - k_3 - in\gamma),\\
A_{213}/A_{231} &= -(k_1 - k_3 + in\gamma)/(k_1 - k_3 - in\gamma),\\
A_{132}/A_{312} &= -(k_1 - k_3 + in\gamma)/(k_1 - k_3 - in\gamma),\\
A_{321}/A_{231} &= -(k_3 - k_2 + in\gamma)/(k_3 - k_2 - in\gamma),\\
A_{321}/A_{312} &= -(k_2 - k_1 + in\gamma)/(k_2 - k_1 - in\gamma).
\end{aligned} \tag{26}$$

A partir desta equação se define a a relação de Yang-Baxter como a relação de proporcionalidade entre os parâmetros A_P, como

$$Y_{ab} = -(k_a - k_b + in\gamma)/(k_a - k_b - in\gamma), \tag{27}$$

onde $A_{abc} = Y_{ab}A_{bac}$, $(a, b, c) = 1, 2, 3.$, para os 6 casos.

Por meio da relação de Yang-Baxter, a Eq. (26) pode ser reduzida para

$$\begin{aligned}
A_{123} &= -C(k_1 - k_2 + in\gamma)(k_1 - k_3 + in\gamma)(k_2 - k_3 + in\gamma),\\
A_{213} &= -C(k_2 - k_1 + in\gamma)(k_1 - k_3 + in\gamma)(k_2 - k_3 + in\gamma),\\
A_{132} &= -C(k_1 - k_2 + in\gamma)(k_1 - k_3 + in\gamma)(k_3 - k_2 + in\gamma),\\
A_{321} &= -C(k_2 - k_1 + in\gamma)(k_3 - k_1 + in\gamma)(k_3 - k_2 + in\gamma),\\
A_{231} &= -C(k_2 - k_1 + in\gamma)(k_3 - k_1 + in\gamma)(k_2 - k_3 + in\gamma),\\
A_{312} &= -C(k_1 - k_2 + in\gamma)(k_3 - k_1 + in\gamma)(k_3 - k_2 + in\gamma).
\end{aligned} \tag{28}$$

onde C é uma constante de proporcionalidade.

Aplicando a condição de periodicidade, Eq. (6), na função de onda, se conseguem

$$e^{ik_1L} = \left(\frac{k_1 - k_2 + in\gamma}{k_1 - k_2 - in\gamma}\right)\left(\frac{k_1 - k_3 + in\gamma}{k_1 - k_3 - in\gamma}\right), \tag{29a}$$

$$e^{ik_2L} = \left(\frac{k_2 - k_1 + in\gamma}{k_2 - k_1 - in\gamma}\right)\left(\frac{k_2 - k_3 + in\gamma}{k_2 - k_3 - in\gamma}\right), \tag{29b}$$

$$e^{ik_3L} = \left(\frac{k_3 - k_1 + in\gamma}{k_3 - k_1 - in\gamma}\right)\left(\frac{k_3 - k_2 + in\gamma}{k_3 - k_2 - in\gamma}\right). \tag{29c}$$

Aplicando no caso em que o momento total é nula, $P = 0$, seja

$$\bar{k} = k_2 - k_1, \quad k_1 + k_2 = -k_3. \tag{30}$$

As Eqs. (29a)-(29c) são reescritas assim

$$e^{i\bar{k}L} = \left(\frac{\bar{k} + in\gamma}{\bar{k} - in\gamma}\right)^2 \left[\frac{(\bar{k} + 2in\gamma)^2 - k_3^2}{(\bar{k} - 2in\gamma)^2 - k_3^2}\right], \tag{31a}$$

$$e^{ik_3L} = \left(\frac{\bar{k} + 3k_3 + 2in\gamma}{\bar{k} + 3k_3 - 2in\gamma}\right)\left(\frac{\bar{k} - 3k_3 - 2in\gamma}{\bar{k} - 3k_3 + 2in\gamma}\right). \tag{31b}$$

As fases da função de onda, Eq. (25), adotam a forma

$$\begin{aligned}
(i) &= k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = k_1(x_1 - x_3) + k_2(x_2 - x_3),\\
(ii) &= (k_2x_1 + k_1x_2 + k_3x_3 = k_1(x_2 - x_3) + k_2(x_1 - x_3),\\
(iii) &= k_1x_1 + k_3x_2 + k_2x_3 = k_1(x_1 - x_2) + k_2(x_3 - x_2),\\
(iv) &= k_3x_1 + k_2x_2 + k_1x_3 = k_1(x_3 - x_1) + k_2(x_2 - x_1),\\
(v) &= k_2x_1 + k_3x_2 + k_1x_3 = k_1(x_3 - x_2) + k_2(x_1 - x_2),\\
(vi) &= k_3x_1 + k_1x_2 + k_2x_3 = k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_1).
\end{aligned} \tag{32}$$

A função de onda depende das distancias relativas entre dois sítios diferentes.
Para determinar o acoplamento repulsivo, g, se considera como primeiro caso, o limite $k_1 = k_2 = k$, a qual implica $k_3 = -2k$. Então, as Eqs. (28), (31a) e (31b), são reduzidas para

$$A_{123} = -A_{213}, A_{132} = -A_{231}, A_{321} = -A_{312}, \tag{33a}$$

$$e^{ikL} = (3k + in\gamma)/(3k - in\gamma). \tag{33b}$$

O acoplamento repulsivo tem a forma, desde a Eq. (33b),

$$g = \frac{3\hbar^2}{m} k \tan(kL/2). \tag{34}$$

Expressão funcionalmente semelhante ao obtida para $N = 2$.
Como consequência dos parâmetros serem opostos, Eq. (33a), a função de onda é nula. Isto quer dizer, que a função somente existe para qualquer valor dos pseudo momentos $k_1 \neq k_2$.

Outro limite seria assumir que $k_3 = 0$, então $k_1 = -k_2 = k$, neste caso se conseguem: Os parâmetros

$$\begin{aligned}
A_{123} &= -C(2k + in\gamma)[k^2 + (n\gamma)^2], \\
A_{213} &= -C(2k - in\gamma)[k^2 + (n\gamma)^2], \\
A_{132} &= -C(2k + in\gamma)(k + in\gamma)^2, \\
A_{321} &= -C(2k - in\gamma)[k^2 + (n\gamma)^2], \\
A_{231} &= -C(2k - in\gamma)(k - in\gamma)^2, \\
A_{312} &= -C(2k + in\gamma)[k^2 + (n\gamma)^2].
\end{aligned} \tag{35}$$

As fases

$$\begin{aligned}
(i) &= k(x_1 - x_2), \\
(ii) &= k(x_2 - x_1), \\
(iii) &= k(x_1 - x_3), \\
(iv) &= k(x_3 - x_2), \\
(v) &= k(x_3 - x_1), \\
(vi) &= k(x_2 - x_3),
\end{aligned} \tag{36}$$

e

$$e^{ikl} = \Big(\frac{2k + in\gamma}{2k - in\gamma}\Big)\Big(\frac{k + in\gamma}{k - in\gamma}\Big). \tag{37}$$

Por um lado,desde Eq. (37), se deriva o acoplamento repulsivo

$$g = \frac{3\hbar^2}{m} k\big[- \cot(kL/2) \pm \sqrt{9(\cot(kL/2))^2 + 8}\big], \tag{38}$$

e por outro lado, usando as Eqs. (35) e (36), se observa que a função de onda é não nula, e que depende claramente das distâncias relativas dos sítios.

Finalmente, nota-se que se o número de bósons continua aumentando, o sistema se torna cada vez mas complexo, tornando o *anstaz* de Bethe intratável. Uma alternativa para estas questões é resolver em forma numérica, ou refinar o próprio *ansatz*.

IV. CONCLUSÕES

O *anstaz* de Bethe é uma ferramenta útil na resolução de diversos modelos unidimensionais. Neste trabalho ele foi aplicado para um modelo de um gás bosônico repulsivamente interagente para $N = 2$ bósons. Além disso, foi determinado a energia para o estado fundamental, assim como o comportamento do acoplamento repulsivo de contato como função do parâmetro adimensional de Lieb-Liniger e a função de onda desse sistema em particular. Finalmente, analisamos algúns casos particulares para $N = 3$ bósons, onde foi calculada o acoplamento repulsivo.

[1] B. Sutherland, *Beautiful Models: 70 Years of Exactly Solved Quantum Many-Body Problems* (World Scientific Pub Co Inc; Fir edition, 2004), ISBN 9812388974.
[2] B. S. Shastry, S. S. Jha, and V. Singh, eds., *Exactly Solvable Problems in Condensed Matter and Relativistic Field Theory* (Springer-Verlag (Berlin), 1985), ISBN 3-540-16075-2.
[3] H. Bethe, Zeitschrift für Physik **71**, 205 (1931).
[4] L. Hulthén, Ark. Mat., Astron. Fys. **11** (1938).
[5] J. Hubbard, Proc. Roy. Soc. London A **276**, 238 (1963).
[6] M. Gaudin, Phys. Lett. A **24**, 55 (1967).
[7] C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. **19**, 1312 (1967).
[8] E. H. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. **130**, 1605 (1963).

[9] E. H. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. **130**, 1626 (1963).
[10] L. Tonks, Phys. Rev. **50**, 955 (1936).
[11] M. Girardeau., J. Math. Phys. **1**, 560 (1960).
[12] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
[13] R. J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics* (Academic Press, New York, 1982).
[14] M. Zvonarev, *Notes on bethe ansatz* (2010), URL `http://cmt.harvard.edu/demler/TEACHING/Physics284/LectureZvonarev.pdf`.
[15] M. T. Batchelor, Physics Today **60**, 36 (2007).
[16] M. Gaudin and J.-S. Caux, *The Bethe Wavefunction* (Translated by Jean-Sébastien Caux, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2014), ISBN 1107045851.
[17] F. Franchini, *Notes on bethe ansatz techniques* (2011), URL `https://people.sissa.it/~ffranchi/BAnotes.pdf`.
[18] C. A. Tracy and H. Widom, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 485204 (2008).
[19] E. H. Lieb and F. Y. Wu, Phys. Rev. Lett. **20**, 1445 (1968).
[20] B. Paredes and et al, Nature **429**, 277 (2004).
[21] T. W. T. Kinoshita and D. S. Weiss, Science **305**, 1125 (2004).
[22] T. W. T. Kinoshita and D. S. Weiss, Phys. Rev. Lett. **95**, 190406 (2005).
[23] A. Görlitz and et al, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001).
[24] M. Takahashi, *Thermodynamics of one-dimensional solvable models* (Cambridge University Press (Cambridge), 1999), ISBN 0521551439.