

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Monografia

Tópicos em Teoria de Muitos Corpos

Descrição Matemática dos Defeitos Topológicos

Michel Marcos Jordão Miranda
16 de novembro de 2018

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Monografia

Tópicos em Teoria de Muitos Corpos

Descrição Matemática dos Defeitos Topológicos

Michel Marcos Jordão Miranda

n^o USP: 10669061

São Carlos, 16 de novembro de 2018

Sumário

Sumário	i
1 Introdução	1
2 Meios Ordenados e Defeitos	2
2.1 Spins no Plano	2
3 Estrutura de Grupo dos Defeitos Topológicos	7
3.1 Grupo Fundamental em um Ponto	8
3.2 Grupo Fundamental	10
4 Espaço do Parâmetro de Ordem Como Espaço dos Cosets	11
5 Grupo Fundamental do Espaço do Parâmetro de Ordem	13
5.1 Teorema Fundamental Sobre o Grupo Fundamental	13
6 Conclusão	16
Referências	16

1 Introdução

Sistemas fortemente interagentes sempre apresentam peculiaridades e fenômenos emergentes fascinantes [1]. Deparar-se com comportamentos anômalos e inesperados em situações não muito exóticas, é comum em sistemas interagentes de muitos corpos [2]. Um destes comportamentos é a manifestação de fases topológicas da matéria. Essas novas fases foram descobertas experimentalmente em 1972 por M. Chester, L. C. Yang e J. B. Stephen [3], em um experimento que mostrava uma fase superfluida em um sistema bidimensional formado por um filme fino de ^4He . Entretanto, isso parecia impossível: pelo teorema de N. D. Mermin e H. Wagner [4], a existência de quebra de simetria contínua em sistemas bidimensionais é proibida. A solução para este mistério veio com a introdução, feita por J. M. Kosterlitz e D. Thouless [5–7] entre 1972 e 1974, de um tipo de ordenamento mais sutil que a matéria apresenta: ordenamento topológico. Desde então os estudos de topologia em sistemas de matéria condensada ganharam grande visibilidade e foram de grande contribuição para o melhor conhecimento da natureza a nossa volta. Toda a importância do pioneirismo no assunto culminou no prêmio Nobel de Física de 2016 para Kosterlitz, Thouless e D. Haldane (este último pelos seus trabalhos conjuntos com Thouless envolvendo o efeito Hall quântico). Com estes novos descobrimentos sobre os estados da matéria, percebemos o quão fascinante e não trivial a natureza pode se tornar em sistemas interagentes de muitos corpos.

É claro que a busca por novas teorias que descrevessem formalmente estes estados e suas propriedades foram crescendo gradativamente com os anos, o que resultou em um formalismo especial para a descrição destes meios; inclusive englobando possíveis defeitos de mesma natureza [8], que acabam por serem os responsáveis pela manifestação destas novas fases exóticas.

O objetivo deste trabalho se resume em descrever matematicamente (e fornecer intuição física quando possível) defeitos topológicos em meios ordenados. Essa descrição matemática se baseia em classificar os tipos de defeitos, que levam a singularidades no parâmetro de ordem e, portanto, a propriedades do sistema. Conhecendo esta classificação, saberemos quais são os defeitos e como enxergá-los nas propriedades físicas do nosso sistema. Para tanto, na Seção 2 definimos o que é meio ordenado, parâmetro de ordem e defeitos topológicos. A fim de ilustrar meios que apresentam esta estrutura, terminamos a seção com um exemplo muito instrutivo que nos fornece valioso significado e intuição física de defeitos topológicos. Na Seção 3 introduzimos a noção de grupo fundamental. Este grupo guarda informações sobre os defeitos topológicos, ordenando-os em classes. Por conta disto, precisamos encontrar uma maneira de obter o grupo fundamental, já que toda informação desejada está nele. Com isto em mente, fazemos uma descrição através de teoria de grupos do espaço do parâmetro de ordem na Seção 4, visando utilizar deste formalismo para o cálculo do grupo fundamental na seção posterior. Finalmente, na Seção 5 enunciamos e exploramos o chamado *teorema fundamental sobre o grupo fundamental*. Este teorema, juntamente com o formalismo desenvolvido na seção precedente, nos fornece um algoritmo para o cálculo do grupo fundamental do espaço do parâmetro de ordem. Ainda nesta seção, fornecemos dois exemplos do uso deste algoritmo envolvendo spins em 2 e 3 dimensões.

2 Meios Ordenados e Defeitos

Nossa análise de defeitos topológicos se restringirá aos chamados *meios ordenados*. Como o nome sugere, estes meios podem ser caracterizados pelo chamado *parâmetro de ordem*, que guarda a assinatura da configuração em que o meio se encontra. Formalmente, definimos:

Definição 2.1. Chamamos de *parâmetro de ordem* uma função $f : \mathbb{R}^d \mapsto R$ contínua em todo espaço real \mathbb{R}^d , exceto, possivelmente, em algumas hipersuperfícies isoladas de dimensão $d_h = d - 1$. O conjunto R é chamado *espaço do parâmetro de ordem*.

Definição 2.2. Chamamos de *meio ordenado* uma região do espaço descrito por um *parâmetro de ordem*.

As hipersuperfícies isoladas da Def. 2.1 serão nossos *defeitos topológicos*. Estaremos interessados nos casos onde $d = 2, 3$, isto é, os defeitos topológicos tratados serão pontos no plano ou linhas no espaço.

Definição 2.3. Chamamos de *defeitos topológicos* as hipersuperfícies isoladas de dimensão $d_h = d - 1$, nas quais o *parâmetro de ordem* é descontínuo.

Dizemos que o meio é *uniforme* se seu parâmetro de ordem é constante em todo o espaço real. Neste trabalho estudaremos os meios não uniformes, que possivelmente apresentarão defeitos.

Para ilustrar as ideias destas definições e, principalmente, fornecer significado mais físico e palpável ao termo “defeito topológico”, é instrutivo analisar um exemplo relativamente simples que nos dará alguns resultados gerais.

2.1 Spins no Plano

Um dos exemplos mais simples e muito instrutivos de defeitos topológicos é o de um magneto clássico bidimensional, tanto no espaço real quanto no espaço dos spins. Como convenção, tomamos o módulo de todos os spins igual a um. Com isto, temos somente o grau de liberdade angular. O parâmetro de ordem para este sistema é dado por

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \cos(\varphi(\mathbf{r}))\hat{\mathbf{x}} + \sin(\varphi(\mathbf{r}))\hat{\mathbf{y}}, \quad (1)$$

em que $\varphi(\mathbf{r})$ é o ângulo com respeito ao eixo x que se abre no sentido anti-horário. Dessa forma, dado um ponto \mathbf{r} em \mathbb{R}^2 temos uma seta localizada em \mathbf{r} , apontando em alguma direção ditada por $\varphi(\mathbf{r})$. Suponha que esse campo vetorial seja contínuo em todo o espaço, exceto em um ponto \mathbf{r}_0 e que, além disso, sabemos sua forma funcional em todo o espaço, exceto em uma região circular de raio \bar{a} centrada em \mathbf{r}_0 . Nosso objetivo é determinar se \mathbf{S} é singular em \mathbf{r}_0 olhando suas propriedades longe deste ponto.

Para isto, considere uma circunferência centrada em \mathbf{r}_0 de raio $a > \bar{a}$, que chamaremos de C_a . Nossa hipótese nos diz que conhecemos \mathbf{S} nesta circunferência. Com isto, podemos explorar uma quantidade topológica do parâmetro de ordem, chamada de *winding number* em inglês, que é melhor traduzido por *lacete* ou *índice da curva* em português. Antes de continuar nosso exemplo, é oportuno definir e discutir alguns aspectos sobre o lacete.

Em topologia essa quantidade caracteriza curvas contínuas fechadas no plano e as ordena em classes. Curvas pertencentes a mesma classe podem ser deformadas continuamente umas nas outras, isto é, curvas com o mesmo lacete podem ser transformadas umas nas outras através de deformações contínuas. O conjunto destas deformações contínuas é chamado de *homotopia*, e as curvas que são deformadas uma na outra são ditas *homotópicas*. Formalmente:

Definição 2.1.1. *Uma homotopia entre duas curvas $f, g : I \mapsto M$, onde M é uma variedade d -dimensional e I é um intervalo real, é um conjunto de mapas (ou curvas)*

$$\{h_t \mid \forall t \in [0, 1], h_t : I \mapsto M \text{ é contínua em } t \text{ e em } I \text{ e também } h_0 = f, h_1 = g\}. \quad (2)$$

Definição 2.1.2. *Duas curvas $f, g : I \mapsto M$ são ditas homotópicas se existe uma homotopia entre elas.*

Algumas vezes é instrutivo pensar na variável t da Def. 2.1.1 como o tempo. Assim, a homotopia entre f e g pode ser interpretada como um “filme” que mostra a curva f se tornando a curva g . Um exemplo de curvas homotópicas está ilustrado na Figura 1a e outro exemplo de curvas não homotópicas está na Figura 1b.

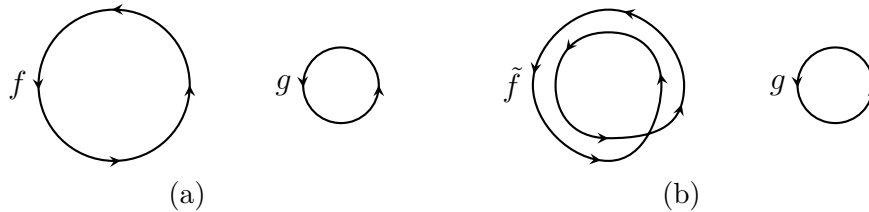


Figura 1: (a) Duas curvas f e g homotópicas e; (b) duas curvas \tilde{f} e g não homotópicas.

Erroneamente podemos pensar que \tilde{f} é homotópica a g , e construir a seguinte homotopia: diminuamos continuamente o raio da circunferência mais externa de \tilde{f} e aumentamos o raio da circunferência mais interna, até que ambas sejam iguais ao raio da curva g . Entretanto, dessa maneira teremos duas circunferências sobrepostas, que não é a mesma curva que g , que é somente uma circunferência de raio menor.

Podemos dizer que o lacete de uma curva fechada com respeito a um dado ponto é o número total de vezes que a curva viaja no sentido anti-horário (que fornece um lacete positivo), ou no sentido horário (que fornece um lacete negativo) com respeito ao ponto dado. Por exemplo, na Figura 1a, imagine que queremos o lacete da curva f com respeito a algum ponto em seu interior¹. De acordo com a nossa definição, o lacete será $n = 1$. Todavia, se calcularmos o lacete da curva \tilde{f} da Figura 1b, veremos que $n = 2$. Ainda, se o sentido das curvas fosse o sentido horário, teríamos $n = -1$ para f e $n = -2$ para \tilde{f} . Mais intrigante: se tomarmos o ponto de referência fora das curvas, seus lacetes são nulos! Esse é um resultado simples e geral que vale para qualquer curva fechada.

Para definir formalmente o lacete, precisamos munir o plano real com a multiplicação complexa², transformando-o em corpo, porque dessa forma podemos usar todas as propriedades de análise complexa.

¹No caso, interior significa a área que a curva delimita e não um ponto em cima da curva.

²Lembre-se que os números complexos são simplesmente o \mathbb{R}^2 com a multiplicação complexa $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ e que $i = (0, 1)$.

Definição 2.1.3. Definimos o lacete de uma curva $\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^2$ fechada, com respeito a um ponto $z_0 \notin \gamma(I)$, como sendo o número $n(\gamma, z_0)$ dado por

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz. \quad (3)$$

Com essas novas ferramentas em mãos, é pertinente voltarmos ao nosso problema físico que envolve o parâmetro de ordem.

Como foi dito, exploraremos o lacete do parâmetro de ordem. Todavia, argumentamos que o lacete é uma propriedade de curvas fechadas no plano e não de campos vetoriais. Entretanto, perceba que os possíveis valores de \mathbf{S} pertencem a circunferência de raio unitário, comumente chamada de S^1 . Lembrando da Def. 2.1 notamos que $R = S^1$ e portanto $\mathbf{S} : \mathbb{R}^2 \mapsto S^1$. Percorrendo o contorno C_a no espaço real no sentido anti-horário³, podemos coletar os valores de $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ com $\mathbf{r} \in C_a$ e “pintar” esses pontos no espaço S^1 . Agora, para melhor visualização, descolamos os pontos pintados de S^1 e os colocamos logo acima, ou abaixo do seus lugares. Fazendo isto, construiremos uma curva em S^1 . Esta curva no espaço do parâmetro de ordem, que chamaremos de γ_{C_a} , será contínua em virtude da continuidade de \mathbf{S} e será fechada porque C_a é. Dessa maneira, definimos o lacete de \mathbf{S} com respeito a C_a como sendo o lacete da curva γ_{C_a} em S^1 com respeito a origem O .

Como exemplo, veja a Figura 2.

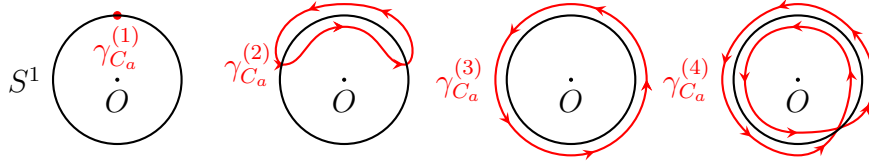


Figura 2: Curvas $\gamma_{C_a}^{(1)}$, $\gamma_{C_a}^{(2)}$, $\gamma_{C_a}^{(3)}$ e $\gamma_{C_a}^{(4)}$ na variedade S^1 que representam diferentes configurações de spins no espaço real. Tenha em mente que as curvas, na verdade, estão sobre S^1 e não fora. Elas foram construídas “pintando” os pontos $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ com $\mathbf{r} \in C_a$ ($C_a \subset \mathbb{R}^2$) para diferentes configurações (1,2, 3 e 4) de meios ordenados.

Os lacetes das curvas $\gamma_{C_a}^{(i)}$ são calculados como definido anteriormente, todavia, com respeito ao ponto O , que não está em S^1 . Todos são obtidos a partir do contorno C_a no espaço real, mas, para diferentes configurações de spins. Os lacetes são: $n(\gamma_{C_a}^{(1)}, O) = 0$, $n(\gamma_{C_a}^{(2)}, O) = 0$, $n(\gamma_{C_a}^{(3)}, O) = 1$ e $n(\gamma_{C_a}^{(4)}, O) = 2$. Novamente, se o sentido das curvas fosse alterado, o lacete seria negativo. Perceba que dada uma curva no espaço do parâmetro de ordem, podemos recuperar a configuração de spins correspondente (não de forma única), como ilustra a Figura 3.

Agora vamos voltar ao nosso objetivo inicial: determinar se \mathbf{S} é singular em \mathbf{r}_0 olhando suas propriedades longe deste ponto. Lembrem-se que C_a é uma circunferência centrada em \mathbf{r}_0 com raio $a > \bar{a}$. Imagine que nossa configuração de spins em C_a seja a ilustrada na Figura 3a. Imagine agora que começamos diminuir o raio de C_a . O que podemos dizer sobre a configuração de spins nestas novas circunferências de raios menores?

Para responder essa pergunta, devemos lembrar que somente curvas com o mesmo lacete são homotópicas. Por conta disto, a configuração de spins que corresponde a curva $\gamma_{C_a}^{(1)}$ em S^1 com lacete nulo, só pode ser transformada em outra configuração de spins

³Podemos percorrer no sentido horário. Mas, por convenção, sempre que dissermos que percorremos um contorno no espaço real, o sentido será o anti-horário.

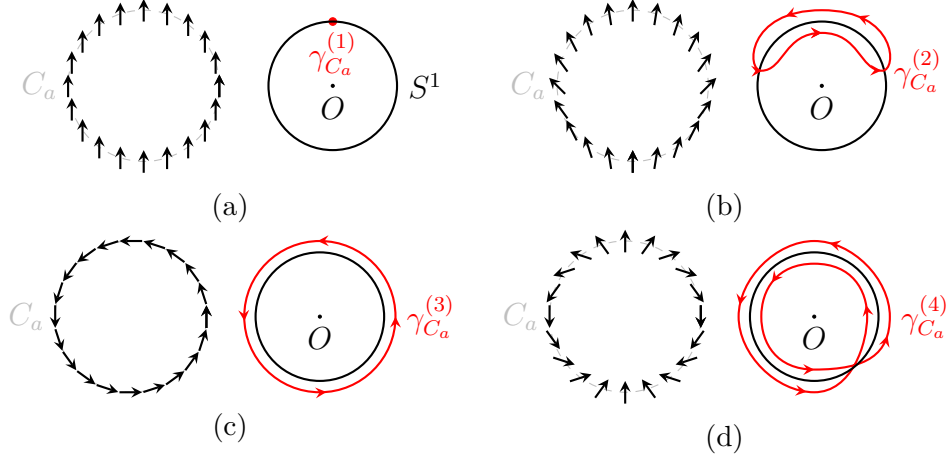


Figura 3: Diversas configurações de spins no espaço real sobre o contorno C_a , resultantes de curvas no espaço do parâmetro de ordem (ou vice-versa). (a) e (b) Configurações que fornecem lacete nulo; (c) configuração com lacete um e; (d) configuração com lacete 2.

correspondente a outra curva em S^1 também com lacete nulo como, por exemplo, a configuração de spins da curva $\gamma_{C_a}^{(2)}$, mostrada na Figura 3b. Portanto, se diminuirmos o raio de C_a , a configuração de spins poderá mudar (de forma contínua), mas continuará resultando em uma curva γ_{C_a} em S^1 com lacete nulo⁴. Esse resultado é sempre válido, não importa quão pequeno o raio de C_a se torne e qual o lacete de \mathbf{S} em C_a .

Vamos explorar outra situação, onde a configuração de spins em C_a nos fornece lacete igual a 1. Dessa forma, diminuimos o raio de C_a até quase colapsarmos em \mathbf{r}_0 . Como o lacete sempre é 1, concluímos que spins muito próximos em C_a possuem direções muito distintas e portanto, a derivada de \mathbf{S} diverge (para melhor visualizar isto, imagine a configuração de spins da Figura 3c concentrada em um ponto). Sendo assim, concluímos que o ponto \mathbf{r}_0 é de fato singular sem analisarmos diretamente este ponto.

Por outro lado, se o lacete em C_a é nulo e a configuração de spins correspondente é constante (como na Figura 3a), a derivada de \mathbf{S} é bem definida e não diverge. Entretanto, se a configuração alterar-se conforme diminuimos C_a para outra configuração de lacete nulo, como na Figura 3b, teremos divergência em \mathbf{r}_0 . Porém, essa divergência é falsa, pois ela é o que chamamos de *topologicamente instável*. A razão para isto é a seguinte.

Como foi dito, é possível que a configuração de spins se altere conforme diminuimos o raio de C_a . Por conta disto, podemos remover singularidades com lacete nulo realizando a chamada *cirurgia local*. Esse processo nos permite alterar a configuração de spins de maneira a preservar o lacete. Com efeito, uma configuração com lacete nulo como a da Figura 3b (mas com seu interior preenchido com a mesma configuração) pode ter seu núcleo transformado sem comprometer a continuidade de \mathbf{S} (muito menos suas propriedades topológicas), na configuração de spins constante (todos os spins em C_a apontam na mesma direção) da Figura 3a.

Mostraremos isto construindo o campo vetorial desejado. Nesse momento, é útil usar coordenadas polares, onde adotaremos um eixo de coordenadas xy fixo no ponto \mathbf{r}_0 e identificaremos um ponto (x, y) neste eixo com o par (r, θ) , onde r será a distância entre \mathbf{r}_0 e \mathbf{r} e θ é o ângulo entre o eixo x e \mathbf{r} . Note que existe uma homotopia h_t entre

⁴Estas propriedades são garantidas pela continuidade de \mathbf{S} em todo o espaço exceto em \mathbf{r}_0 .

as curvas $\gamma_{C_a}^{(2)}$ e $\gamma_{C_a}^{(1)}$ em S^1 . Cada curva desta homotopia vem de alguma configuração do parâmetro de ordem (ou cada curva dá origem a uma configuração). Podemos pensar que estas configurações do parâmetro de ordem são obtidas percorrendo-se algum contorno C_d centrado em algum \mathbf{r} (isto é indiferente, o que realmente importa é que temos as configurações). Denotamos tais configurações de $\mathbf{S}_t(d)$, onde $\mathbf{S}_0(d) = \mathbf{S}''(a)$ e $\mathbf{S}_1(d) = \mathbf{S}'(a)$, com \mathbf{S}' e \mathbf{S}'' os parâmetros de ordem que dão origem as configurações de $\gamma_{C_a}^{(2)}$ e $\gamma_{C_a}^{(1)}$, respectivamente. Suponha que \mathbf{S}' esteja na área delimitada por C_a . Queremos alterar o núcleo desta região. Logo, basta construirmos um campo vetorial \mathbf{S} que coincide com \mathbf{S}' quando $r = a$ e com \mathbf{S}'' quando $r = 0$. Esse campo é construído usando os campos $\mathbf{S}_t(d)$ e é dado por:

$$\mathbf{S}(r, \theta) := \mathbf{S}_t(d, \theta)|_{t=r/a}, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (4)$$

Esse novo campo é contínuo porque a homotopia entre $\gamma_{C_a}^{(2)}$ e $\gamma_{C_a}^{(1)}$ é. Um exemplo de cirurgia local é dado na Figura 4. Através desse procedimento vemos que podemos alterar a configuração do parâmetro de ordem sem influenciar em sua topologia. Dessa maneira, configurações com lacete nulo, que possuem singularidade, podem sempre serem transformadas em uma configuração com spins constantes e, portanto, a singularidade é removida. Todavia, em se tratando de configurações com lacete não nulo, a singularidade persiste. Chamamos estas singularidades de *topologicamente estáveis*.

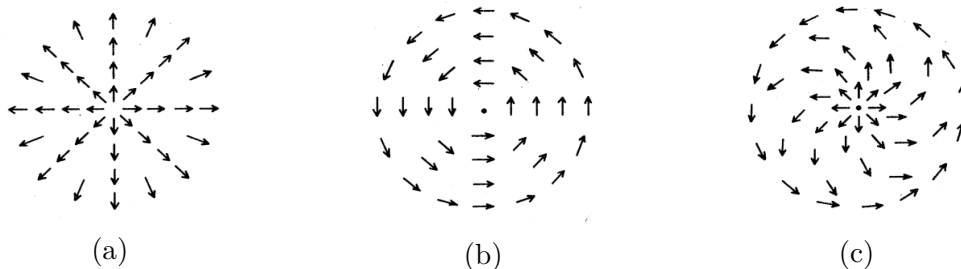


Figura 4: (a) e (b) Dois exemplos de configurações de spins que fornecem lacete 1 e; (c) cirurgia local feita com estas configurações de spins. Note que o núcleo de (b) foi substituído pelo núcleo de (a).

Com esse exemplo vimos que as propriedades topológicas do parâmetro de ordem nos dão uma ferramenta poderosa para analisar suas singularidades, porque elas fornecem informações sobre o ponto singular sem precisar estar perto desse ponto. Ou seja, a presença da singularidade em um ponto possui uma assinatura em regiões longe daquele ponto e, com essa assinatura, podemos identificar e classificar os defeitos, obtendo mais informações do seu efeito sobre as propriedades físicas do sistema. Vale ressaltar que esses defeitos são capturados pela função de partição e podem fornecer comportamentos diferentes de meios sem defeitos topológicos. A estabilidade física destes defeitos é ditada pela energia livre das configurações e, caso algum defeito seja energeticamente estável, podemos observar comportamentos singulares, ou não usuais nas propriedades termodinâmicas.

Depois de trabalhados os conceitos chaves através de um exemplo simples, é pertinente explorarmos um pouco mais da estrutura matemática deste novo mundo.

3 Estrutura de Grupo dos Defeitos Topológicos

Nesta seção faremos uma breve introdução a estrutura de grupo que os defeitos topológicos possuem. Isto é extremamente útil, pois as propriedades de grupos são bem conhecidas e podemos desfrutá-las. Como faremos uso de elementos de teoria de grupos é útil definir e explicar o que usaremos.

Definição 3.1. Um grupo G é um conjunto de elementos munido com uma lei produto, definida para todo par de elementos de G , que satisfaz:

1. Se $g_1, g_2 \in G$, então $g_1g_2 \in G$ (fechamento);
2. A lei produto é associativa, isto é, $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$, $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$;
3. Existe um único elemento $e \in G$, tal que $eg = g = ge$, $\forall g \in G$ (identidade);
4. Para todo $g \in G$, existe $g^{-1} \in G$, tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ (inversa).

Definição 3.2. Um subconjunto H de G é um subgrupo se ele satisfaz os postulados de grupo da Def. 3.1.

Definição 3.3. Um mapeamento $\sigma : G \mapsto G'$ é um isomorfismo se $\sigma(g_1) = \sigma(g_2) \Leftrightarrow g_1 = g_2$ e $\sigma(g_1)\sigma(g_2) = \sigma(g_1g_2)$. Isto é, dois grupos G e G' são isomórficos se seus elementos podem ser mapeados um a um e o mapa preserva a lei produto dos grupos.

Isomorfismos são extremamente úteis. Isso se deve ao fato da preservação da lei produto do grupo. Imagine que temos algum grupo com elementos e lei produto complicados. Se este grupo for isomorfo a um grupo conhecido e mais fácil de estudar, é mais prático analisarmos este último grupo do que o primeiro e, através do isomorfismo, obtemos as propriedades do primeiro.

Definição 3.4. Dado um grupo G e um subgrupo $H \subset G$, definimos o co-cojunto à esquerda (em inglês left coset) gH para um $g \notin H$ como

$$gH := \{gh \mid \forall h \in H \text{ e } g \in G, \text{ mas } g \notin H, \text{ fixo.}\} \quad (5)$$

O co-cojunto à direita Hg é definido da mesma maneira, mas com o produto tomado a direita.

O conceito de coset é muito comum em teoria de grupos. Usaremos esse conceito para explorar a estrutura de grupos do espaço do parâmetro de ordem na Seção 4. Antes de caminharmos para próxima seção, é útil explorarmos um pouco de algumas propriedades dos cosets. Primeiro, note que todos os elementos de um coset são diferentes entre si, pois se $gh_1 = gh_2 \Leftrightarrow h_1 = h_2$, por conta dos postulados da Def. 3.1. Assim, o número de elementos em gH é o mesmo de H . Também temos que todos os elementos de um coset são diferentes de todos os elementos de outro coset. Para ver isto, tome $gh_1 \in gH$ e $g'h_2 \in g'H$, com $g' \neq g$. Se $gh_1 = g'h_2$, então $g = g'h_2h_1^{-1}$ e, portanto $g \in g'H$. Ainda, $gh = g'h_2h_1^{-1}h = g'h \in g'H$. Com efeito, $gH \equiv g'H$. Dessa forma, fatiamos o grupo G em conjunto disjuntos com o mesmo número de elementos. O conjunto de todos os cosets gH , denotado por G/H , é chamado de *espaço dos co-cojuntos à esquerda* ou *espaço dos cosets à esquerda*. Analogamente definimos H/G como sendo o *espaço dos co-cojuntos à direita* ou *espaço dos cosets à direita*. Perceba que os cosets e o espaço dos cosets podem não possuir a estrutura de grupo. Todavia, se H for um subgrupo invariante o espaço G/H é igual a H/G e podemos associar a G/H uma estrutura de grupo.

Definição 3.5. Um subgrupo H de um grupo G é dito invariante se para todo $g \in G$ e para todo $h \in H$ temos $g^{-1}hg = h'$ com $h' \in H$. Isto é, $g^{-1}Hg = H$.

Para mostrar que G/H tem a estrutura de grupos quando H é invariante, vamos primeiro mostrar que dados dois cosets gH e $g'H$, temos $gHg'H \in G/H$. Tome $gh_1 \in gH$ e $g'h_2 \in g'H$, temos

$$gh_1g'h_2 = geh_1g'h_2 = g(g'g'^{-1})h_1g'h_2 = gg'(g'^{-1}h_1g')h_2 = gg'h_3h_2, \quad (6)$$

onde usamos o fato de H ser invariante dizendo que $g'^{-1}h_1g' = h_3 \in H$. Como $g \neq g' \neq gg' \in G$ e $h_3 \in H$, mas $gg' \notin H$, obtemos um elemento de um novo coset $gg'H$. Logo, podemos escrever a lei produto como

$$gHg'H := gg'H. \quad (7)$$

Com essa lei produto temos que o coset $eH = H$ é a identidade, pois $gHeH = eHgH = gH$. Esse produto é associativo porque o produto do grupo G é. A inversa $g^{-1}H$ de um coset gH também está em G/H , pois se $g \in G$, mas $g \notin H$, temos $g^{-1} \in G$ mas $g^{-1} \notin H$ e portanto,

$$g^{-1}HgH = g^{-1}gH = H = gHg^{-1}H. \quad (8)$$

Ainda, como H é invariante, temos $Hg = Hg$ e, assim, $H/G = G/H$. Portanto, o espaço dos cosets G/H (ou H/G) é um grupo se $H \subset G$ é invariante. Chamamos este grupo de *grupo quociente*.

Neste momento temos todas as ferramentas de teoria de grupos necessárias para continuarmos nossa caminhada na teoria de defeitos topológicos. Na seção seguinte, iremos construir o chamado *grupo fundamental baseado em um ponto* ou *grupo fundamental pontual*, que compila as classes de homotopia entre curvas existentes em uma certa variedade. Na Seção 3.2, iremos argumentar (não demonstrar) que os grupos fundamentais pontuais são isomórficos. Dessa forma, vamos concluir que a estrutura dos defeitos topológicos do espaço do parâmetro de ordem está caracterizada no grupo fundamental.

3.1 Grupo Fundamental em um Ponto

Com os elementos de teoria de grupos abstratos, vamos passar a descrever um espaço de parâmetro de ordem abstrato R . Além disso, como já foi dito na Seção 2, trataremos de defeitos que sejam linhas ou pontos, e portanto, nossos objetos de estudo serão curvas. Antes de mais nada é preciso definir elementos que usaremos constantemente.

Definição 3.1.1. Uma curva fechada $f : I \mapsto R$ contínua é chamada de *laço* (ou em inglês loop) em $x \in R$, se $x \in f(I)$. Um laço pode ser parametrizado no intervalo $I = [0, 1]$, tal que $f(0) = x = f(1)$.

Como vamos constantemente nos referir a loops em x , encurtaremos o nome “loop em x ” somente para “loop”. Mas, tenha em mente que nesta seção lidaremos sempre com loops baseados em x . Também vamos tomar o intervalo I como sendo sempre $[0, 1]$.

Definição 3.1.2. Uma homotopia pontual em x entre dois loops $f, g : [0, 1] \mapsto R$ em $x \in R$ é uma família de loops, com todos passando por x tal que f e g fazem parte desta família. Isto é, uma homotopia pontual em x entre dois loops f e g em x , é um conjunto de mapas como na Def. 2.1.1, mas com a restrição $h_t(0) = x = h_t(1)$, $\forall t \in [0, 1]$.

Como vamos explorar uma estrutura de grupo, precisamos de uma lei produto, conforme Def. 3.1. Isto nos motiva a definir o produto entre dois loops.

Definição 3.1.3. *Dados dois loops $f, g : [0, 1] \mapsto R$ em $x \in R$, definimos o produto $f \circ g : [0, 1] \mapsto R$ como sendo a curva*

$$(f \circ g)(z) = \begin{cases} f(2z) & , 0 \leq z \leq \frac{1}{2} \\ g(2z - 1) & , \frac{1}{2} \leq z \leq 1; \end{cases} \quad (9)$$

ou seja, percorremos primeiro o loop f e depois o loop g .

O produto definido acima em si não fornece uma estrutura de grupo, pois ele não é associativo: dados 3 loops f, g e k , o loop $(f \circ g) \circ k$ possui a mesma imagem que $f \circ (g \circ k)$, porém suas parametrizações são diferentes. Para definirmos um grupo não vamos lidar com as curvas individualmente, mas sim com uma classe de curvas homotópicas entre si. Dessa forma, se f for um loop, definimos $[f]$ como o conjunto de todos os loops homotópicos em $x \in R$ à f . Um loop específico da classe é chamado de *representação* da classe. Por exemplo, f é representação de $[f]$, mas se $g \in [f]$, podemos tomar g como representação de $[f]$.

Vamos definir nossa lei produto do grupo $\pi_1(R, x)$, formado por todas as classes de homotopias, como sendo

$$[f] \circ [g] = [f \circ g], \quad (10)$$

na qual $[f], [g]$ e $[f \circ g] \in \pi_1(R, x)$. O grupo $\pi_1(R, x)$ é chamado de *grupo fundamental de R em x* , ou ainda *primeiro grupo de homotopia de R em x* . Perceba que o produto definido na Eq. (10) é independente da representação da classe de homotopia já que, se $f \sim f'$ e $g \sim g'$ temos $f \circ g \sim f' \circ g'$, ou, por exemplo, $f \circ g' \sim f' \circ g$, onde o símbolo “ \sim ” significa “homotópica à em x ”. Também é fato conhecido que se dois loops diferem somente pelas suas parametrizações, então eles estão na mesma classe de homotopia.

Vamos mostrar que o conjunto $\pi_1(R, x)$ munido com a lei produto da Eq. (10) é de fato um grupo. Para tanto, precisamos mostrar que a lei produto da Eq. (10) é associativa; que a inversa de cada elemento de $\pi_1(R, x)$ está no próprio conjunto e; que $\pi_1(R, x)$ possui uma identidade.

- i) Associatividade:* Tome 3 loops distintos (não homotópicos entre si) f, g e k . Como o loop $(f \circ g) \circ k$ só difere do loop $f \circ (g \circ k)$ por uma parametrização, pela afirmação acima ambos estão na mesma classe de homotopia formada pelo produto das 3 classes de homotopia $[f], [g]$ e $[k]$; ou seja, $([f] \circ [g]) \circ [k] = [f] \circ ([g] \circ [k])$. Logo, a lei produto da Eq. (10) é associativa.
- ii) Identidade:* Seja o loop e tal que $e(z) = x, \forall z \in [0, 1]$. A classe de homotopia $[e]$ é formada por todos os loops que são homotópicos ao ponto x , ou seja, todos os loops que podem ser deformados até se tornarem o ponto x sempre, obviamente, mantendo pelo menos um ponto fixo em x . Com isto, temos que $[e] \circ [f] = [f] \circ [e] = [f], \forall [f] \in \pi_1(R, x)$.
- iii) Inversa:* Seja f^{-1} o loop inverso de f , que definimos como

$$f^{-1}(z) = f(1 - z), \quad z \in [0, 1], \quad (11)$$

isto é, percorremos o loop f no sentido contrário. Se $f \sim g$, trivialmente temos $f^{-1} \sim g^{-1}$. Portanto, definimos a classe $[f]^{-1} = [f^{-1}]$, pois temos a garantia que ela existe. Como podemos representar o produto $[f] \circ [f^{-1}]$ como o produto de qualquer curva em $[f]$ com qualquer outra curva em $[f^{-1}]$, vamos escolher a representação de $[f^{-1}]$ como sendo a inversa da representação de $[f]$. Por exemplo, se escolhermos $g \in [f]$ para ser a representação de $[f]$, escolheremos $g^{-1} \in [f^{-1}]$ para ser a representação de $[f^{-1}]$. Dessa forma, temos que construir uma homotopia entre $g \circ g^{-1}$ e e , pois fazendo isto, mostraremos que $[f] \circ [f^{-1}] = [f \circ f^{-1}] = [e] = [f^{-1} \circ f] = [f^{-1}] \circ [f]$. Uma possível homotopia entre $g \circ g^{-1}$ e e pode ser dada por

$$h_t(z) = \begin{cases} g(2zt), & 0 \leq z \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t(1-z)), & \frac{1}{2} \leq z \leq 1 \end{cases}, \forall t \in [0, 1]. \quad (12)$$

Essa homotopia está pictoricamente representada na Figura 5.

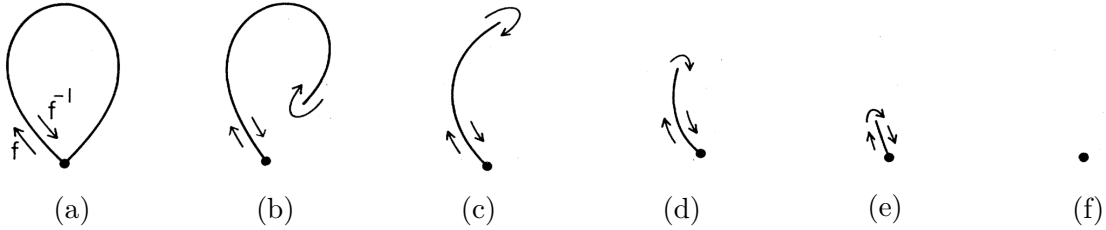


Figura 5: (a) Exemplo de um loop $f \circ f^{-1}$, com $f \in [f]$ e $f^{-1} \in [f^{-1}]$. (b)-(f), homotopia da Eq. (12), entre $f \circ f^{-1}$ e e .

Concluimos que $\pi_1(R, x)$ é de fato um grupo. Os resultados obtidos aqui são gerais e servem para qualquer variedade R . Todavia, não temos porquê tomar curvas em R com pontos fixos. De fato, conforme deformamos nossa curva no espaço real e a mapeamos em R através do parâmetro de ordem, dificilmente isso resultará em curvas baseadas em um ponto. Portanto, é pertinente definir um grupo fundamental que não é baseado em nenhum ponto.

3.2 Grupo Fundamental

Na seção anterior construímos o grupo fundamental de R baseado em x , $\pi_1(R, x)$, através de loops com um ponto fixo. Contudo é possível mostrar que existe um isomorfismo entre grupos fundamentais baseados em pontos distintos, ou seja, $\pi_1(R, x) \simeq \pi_1(R, y)$ ⁵ com $x \neq y$. Essa demonstração está cuidadosamente feita na seção 3 da referência [8]. A prova desta afirmação é relativamente simples e construída através de isomorfismos de caminho no espaço R . Com esse resultado em mãos, não trabalhamos mais com loops baseados em um ponto, mas sim com loops livres. Conseqüentemente, o grupo $\pi_1(R)$ é formado pelas classes de homotopia entre loops livres. Estas homotopias são construídas de maneira análoga as homotopias pontuais da seção anterior, mas usando o conceito de curva não fechada, ou caminho (que é basicamente um loop da Def. 3.1.1, mas com $f(0) = x$ e $f(1) = y$ com $x \neq y$).

⁵Aqui o símbolo “ \simeq ” significará “isomórfico à”.

Entretanto, não precisamos nos preocupar: nosso objetivo será alcançado sem utilizarmos loops livres. Isto porque, graças aos isomorfismos entre os diferentes grupos fundamentais pontuais, podemos nos atentar somente a um deles. A escolha mais comum e útil é do grupo fundamental baseado na identidade. Este resultado será explorado na Seção 5.

4 Espaço do Parâmetro de Ordem Como Espaço dos Cosets

Na seção anterior definimos e explicamos o que é um grupo fundamental de uma variedade. Esse grupo é formado pelas classes de homotopia de loops na variedade que são livremente homotópicos entre si. Dessa forma, podemos obter informações sobre os defeitos topológicos do sistema, já que o grupo fundamental guarda estas características.

Entretanto, é útil e necessário tirar mais proveito do formalismo de teoria de grupos para descrever o espaço do parâmetro de ordem como outro espaço. Isso nos proporcionará um método simples para calcularmos o grupo fundamental do espaço do parâmetro de ordem. Resumidamente, o objetivo desta seção é tomar o espaço do parâmetro de ordem R e interpretá-lo como um espaço dos cosets de H à esquerda (que agora iremos simplesmente chamar de espaço dos cosets) em G , G/H . O grupo G e seu subgrupo H estão relacionados com as simetrias das fases desordenadas e ordenadas. Isso ficará claro mais adiante.

Antes de embarcarmos na interpretação alternativa para R , precisamos definir e explicar algumas propriedades de *grupos contínuos*. Estes tipos de grupos possuem robustez suficiente para extrairmos noção de continuidade deles. De fato, esta é a definição de grupos contínuos, também chamados de *grupos topológicos* ou *grupos de Lie*. Na verdade, grupos de Lie são entidades ainda mais regulares com condições mais fortes de analiticidade. Leitores empolgados podem se dirigir a referência [9]. Para todos os efeitos, a continuidade de um grupo se refere a continuidade de suas transformações.

Tudo o que precisamos é da noção de continuidade, envolvendo sequências⁶, fundida com as propriedades de grupo da Def. 3.1. Isto significa que dadas duas sequências de elementos a_n e b_n de G que convergem para a e b em G , respectivamente, temos que ter $a_n b_n$ convergente para ab . Ainda, a sequência inversa de a_n , denotada por a_n^{-1} deve convergir para a^{-1} . Podemos simplificar estas condições dizendo que para $a, b, a_n, b_n \in G$, a sequência $a_n b_n^{-1}$ deve convergir para ab^{-1} , a fim de G ser um grupo contínuo. Tendo isso em mente, podemos prosseguir em busca da descrição do espaço do parâmetro de ordem desejada.

Geralmente os parâmetros de ordem em física da matéria condensada carregam com eles um grupo G de transformações que *age transitivamente* em R . Isso significa que, dados quaisquer dois valores f_1 e f_2 do parâmetro de ordem, existe pelo menos um $g \in G$ tal que $f_2 = g f_1$ ⁷. Assim, se fixarmos f_1 e mudarmos a transformação g , atingiremos todo R (na verdade, devemos atingir, caso contrário a ação de G em R não é transitiva). Perceba que mais de um grupo pode ter essa propriedade em R , assim como mais de uma transformação pode levar f_1 em f_2 . Dessa forma, temos uma arbitrariedade para escolher o grupo G .

⁶Para isto, obviamente precisamos também de uma métrica que fornece uma noção de distância.

⁷Note que o produto $f_2 = g f_1$ só faz sentido se definida uma *representação* D do grupo abstrato G no espaço vetorial onde a variedade R é um subconjunto [9].

Dado um valor do parâmetro de ordem f , definimos o subgrupo H_f de G , das transformações de G que deixam f inalterado, ou seja, se $h \in H_f$ então $hf = f$. Chamamos H_f de *subgrupo isotrópico de f* (H_f é claramente um subgrupo, pois se a e b deixam f inalterado, temos que ab^{-1} também deixa). Vamos caracterizar R através de algum G e algum $H_f \subset G$ para um f fixo e arbitrário (assim como G), que chamaremos de *parâmetro de ordem de referência*. Se fomos capazes de caracterizar R em termos de G e H_f , essa caracterização não dependerá da escolha do parâmetro de ordem de referência. Podemos caracterizar R como o espaço dos cosets gH_f , isto é $R = G/H_f$. Para mostrarmos isto, precisamos de um mapa entre os cosets de G/H_f e os elementos de R que seja injetor e contínuo. A seguir construímos tal correspondência.

Seja f o parâmetro de ordem de referência. Assim, se $h \in H_f \Rightarrow hf = f$. Para qualquer outro valor $f' \in R$, existe $g \in G$, $g \notin H_f$, tal que $f' = gf = ghf$. Logo, a correspondência é dada por $f' \rightarrow gH_f$ e ela satisfaz:

i) Injetividade: Se $af = f' = bf$, com $a, b \in G$, $a, b \notin H_f$, temos $af = bf \Rightarrow f = a^{-1}bf$ e conseqüentemente $a^{-1}b \in H_f$. Dessa forma, $b = a(a^{-1}b) \in aH_f$, assim como $a \in aH_f$. Portanto, $aH_f = bH_f$ e f' só é mapeado em aH_f (que também pode ser denotado por bH_f). Por outro lado, se $af \neq bf$, temos que $a^{-1}b \notin H_f \Rightarrow a(a^{-1}b) \notin aH_f$. Com efeito, os cosets aH_f e bH_f são diferentes e correspondem a valores diferentes do parâmetro de ordem.

ii) Continuidade: Definimos a continuidade no espaço dos cosets G/H também através de seqüências. Uma seqüência de cosets é dita convergente se, e somente se, pode ser representada como g_nH com $g_n \rightarrow g$ em G ⁸. Dessa forma, dois cosets estarão próximos se conseguirmos construí-los com dois elementos próximos de G . Desta definição, segue que uma seqüência convergente de cosets nos fornece uma seqüência convergente no espaço do parâmetro de ordem, isto é, $f_n = g_nhf$. Por outro lado, suponha que $f_n \rightarrow \bar{f}$ seja uma seqüência em R . Como f_n é convergente, existe uma vizinhança de $e \in G$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_n = e_n\bar{f}$, $\forall n > N$ e e_n pertencente a vizinhança de e . Agora, se \bar{f} corresponde a $g'H_f$, temos que f_n será correspondente ao coset $e_n g'H_f = g_n''H_f$ que converge para $g'H_f$ porque $e_n \rightarrow e$. Logo, o mapeamento é contínuo porque leva uma seqüência convergente de cosets em uma seqüência convergente de valores no espaço do parâmetro de ordem e vice-versa.

Parece estranho associar o espaço dos parâmetros de ordem a um espaço de cosets. Entretanto, isto pode parecer mais natural do que imaginamos. Para clarificar esta ideia, considere o exemplo de spins unitários clássicos em 3 dimensões num espaço real tridimensional. Suponha que haja interação ferromagnética entre os spins, mas que a temperatura do sistema seja alta o suficiente para termos ordem paramagnética, e assim, os spins apontam em direções aleatórias. Um grupo que age transitivamente no sistema é o grupo das rotações em 3 dimensões $SO(3)$. Veja que, além de $SO(3)$ agir transitivamente em R , ele também deixa a fase paramagnética invariante: qualquer elemento de $SO(3)$ leva um spin em outro em qualquer outra direção (ou não); mas, como a fase é formada por muitos spins com direções aleatórias, a fase paramagnética é inalterada. Diminuindo a

⁸Como argumentado na Seção 3, dois cosets gH e $g'H$ podem ser iguais mesmo se $g \neq g'$. No caso, eles são duas representações do mesmo coset. Todavia, pode acontecer de uma representação de uma seqüência de cosets ser convergente e outra não. Um exemplo trivial é a seqüência H, H, H, \dots , que é convergente, e h_1H, h_2H, \dots , com $h_n \in H$ aleatórios, que não é convergente.

temperatura do sistema, os spins alinham-se em uma direção, digamos z . Agora, o grupo de simetria desta fase deixa de ser o $SO(3)$ e passa ser o $SO(2)$ no plano xy , porque qualquer transformação de $SO(2)$ deixará a fase ferromagnética invariante. Com isto, o sistema quebra a simetria da fase paramagnética para reter somente a simetria ferromagnética, que já existia dentro da simetria paramagnética, porque $SO(2) \subset SO(3)$. Com isto em mente, tome um coset do espaço $SO(3)/SO(2)$, por exemplo, o coset $eSO(2) = SO(2)$. Qualquer transformação desse coset aplicada em um spin na fase ferromagnética, irá deixá-lo inalterado. Logo, o coset $eSO(2)$ nos fornece spin na direção z que corresponde a um valor do parâmetro de ordem no espaço S^2 (que é a casca esfera unitária no \mathbb{R}^3). Por outro lado, transformações de outro coset $gSO(2)$ qualquer, irão alterar a direção dos spins na fase ferromagnética, e portanto, o coset $gSO(2)$ nos fornece somente um (porque $gh \in gSO(2)$ aplicado em um spin para cima, fornece o spin rotacionado por g) novo valor de spin, numa direção arbitrária, que é outro valor em S^2 . Dessa forma, notamos que de fato a correspondência é injetora e contínua (porque as transformações de $SO(2)$ são), além dos grupos $SO(3) = G$ e $SO(2) = H_f$ fornecerem informações das fases desordenadas e ordenadas, respectivamente. Assim, essa correspondência nos deixa mais próximos das quebras de simetrias associadas as diferentes fases.

5 Grupo Fundamental do Espaço do Parâmetro de Ordem

Uma classificação completa dos defeitos topológicos é fornecida através do grupo fundamental do espaço do parâmetro de ordem. Isso se deve ao fato do parâmetro de ordem guardar a configuração do sistema e do grupo fundamental traduzir essa informação em uma linguagem topológica. Sabendo os tipos de defeitos em nosso meio, podemos explorar com mais segurança outras propriedades físicas do sistema. É pertinente, portanto, saber buscar e encontrar o grupo fundamental (que foi explicado na Seção 3) para um espaço do parâmetro de ordem escrito como o espaço dos cosets (como construído na Seção 4).

Isso é feito através de um teorema que não iremos demonstrar, mas vamos cuidadosamente enunciar, analisar e exemplificar. O mesmo faz uso de hipóteses de conectividade das transformações do grupo, que resulta em um espaço do parâmetro de ordem *conectado* (o espaço do parâmetro de ordem R ou o grupo G , é conectado se qualquer dois pontos de R ou G são ligados por uma curva inteiramente em R ou G), além de se apoiar também em grupos *simplesmente conexos* (qualquer curva em R ou G pode ser deformada ao um ponto). É útil saber que qualquer grupo G contínuo não simplesmente conexo está relacionado a um grupo que é simplesmente conexo, chamado de *grupo de recobrimento de G* [9]. Com estes elementos definidos, podemos enunciar o teorema e aplicá-lo.

5.1 Teorema Fundamental Sobre o Grupo Fundamental

Teorema 5.1. *Seja G um grupo contínuo, conectado e simplesmente conexo. Seja H um subgrupo de isotropia de G e H_0 o conjunto de pontos em H que são conectados a identidade por caminhos contínuos inteiramente contidos em H . Então, H_0 é um subgrupo invariante de H e o grupo quociente H/H_0 é isomórfico ao grupo fundamental $\pi_1(G/H)$ do espaço dos cosets G/H .*

Para a prova deste teorema veja seções 4 e 5 da referência [8]. Para desfrutar e

entender melhor este teorema, iremos construir a correspondência entre as classes de loops livres homotópicos no espaço dos cosets G/H , que são elementos do grupo $\pi_1(G/H)$, e os cosets do grupo H/H_0 , que vêm a ser as partes conectadas disjuntas de H , que por sua vez são subconjuntos conectados de H que tem interseção nula com qualquer outro subconjunto conectado de H . Claramente estes subconjuntos disjuntos conectados de H são os cosets de H/H_0 . Em outras palavras, iremos construir a correspondência entre os elementos de $\pi_1(G/H)$ e H/H_0 .

A correspondência entre estas duas entidades é feita da seguinte maneira. Seja $g(z)$ um caminho contínuo em G . Definimos um caminho no espaço dos cosets G/H como

$$K(z) = g(z)H, \quad (13)$$

o qual é contínuo graças a definição de continuidade dos espaços dos cosets tratada na Seção 4. Como o grupo fundamental $\pi_1(G/H)$ tem sua estrutura carimbada em um ponto de G/H (conforme argumentado na Seção 3.2), vamos tomar o grupo fundamental de G/H baseado na identidade $eH = H$ de G/H . Para representar um loop baseado em eH no espaço G/H através da Eq. (13), precisamos que $g(0)$ e $g(1)$ sejam membros de $eH = H$ (que é um grupo e portanto é fechado) – porque assim terminaremos no mesmo coset que começamos, isto é, $K(1) = K(0) = eH$. Entretanto, observe que dado um $z \neq 0$ ou 1 , temos $g(z) \notin H$ (se não o coset $g(z)H$ é o próprio grupo H)⁹, e dado um $h \in H$ temos $g(z)h \notin H$ (segue dos postulados de grupo da Def. 3.1). Então, a priori, temos dois cosets distintos, $g(z)H$ e $g(z)hH$. Contudo, é fácil ver que $g(z)hh'$ (um elemento de $g(z)hH$) é igual a um elemento de $g(z)H$, pois $g(z)hh' = g(z)\bar{h}$, com $\bar{h} \in H$. Com efeito, $g(z)hH = g(z)H$. Então, o loop $K(z) = g(z)H$ é igual ao loop $K(z) = g(z)hH$ (porque eles passam pelos mesmos cosets). Como h é arbitrário, e temos $g(0), g(1) \in H$ (loop fechado), escolhemos $h = g^{-1}(1)$ (podemos fazer esta escolha porque $g^{-1}(1) \in H$). Com efeito, temos que os loops baseados em eH dados por $K(z) = g(z)H$ e $K(z) = g(z)g^{-1}(1)H$ são iguais. Dessa maneira, podemos definir um loop baseado em eH como sendo $K(z) = g(z)H$ com $g(0) \in eH = H$ qualquer, e $g(1) = e \in eH$. Assim, todo loop (de cosets) baseado em eH , começa em algum ponto de H e termina na identidade do grupo. Esses pontos onde os loops começam estão dentro de H e, portanto, de algum coset de H/H_0 . Logo, a correspondência entre loops em G/H e cosets em H/H_0 está estabelecida: loops em G/H baseados em eH são caminhos contínuos em H que conectam pontos de H a identidade e , ou seja, conectam os cosets de H/H_0 a e .

Dessa maneira, o cálculo do grupo fundamental para um meio ordenado pode ser resumido no seguinte algoritmo:

1. Determine o espaço do parâmetro de ordem R (R será uma variedade inserida em um espaço vetorial);
2. Determine um grupo G contínuo, conectado e simplesmente conexo (caso G não seja simplesmente conexo, tome seu grupo de recobrimento) que aja transitivamente em R , isto é, dado um valor em R podemos obter qualquer outro valor através das transformações de G . Este grupo descreve a simetria da fase desordenada, que é a fase onde nosso sistema possui valores aleatórios do parâmetro de ordem;
3. Determine um subgrupo isotrópico H_f de G , cujas as transformações deixam um

⁹A não ser que o loop em G/H seja a identidade $K(z) = H, \forall z \in [0, 1]$

certo valor f do parâmetro de ordem invariante. Em contraste com o grupo G , o subgrupo isotrópico H_f descreve as simetrias de uma fase ordenada;

4. Encontre o subgrupo H_0 de H_f que é constituído dos elementos de H_f conectados com a identidade. Isto significa que existem caminhos contínuos inteiramente contidos em H_f que ligam os elementos de H_0 com a identidade do grupo e ;
5. Determine os cosets do grupo H/H_0 (lembre-se que H_0 é invariante e que portanto, H/H_0 possui estrutura de grupo). Geralmente, a estrutura de H/H_0 é carimbada em um grupo mais conhecido e fácil de manusear, isto é, H/H_0 geralmente é isomorfo a outro grupo mais simples que não envolve cosets;
6. Use o Teo. 5.1 para fazer a associação $\pi_1(R) \simeq \pi_1(G/H) \simeq H/H_0$. Assim, teremos o grupo fundamental do espaço do parâmetro de ordem.

Vamos aplicar o teorema nos exemplos de spins bidimensionais e tridimensionais.

Para os spins bidimensionais sabemos que um grupo natural que age transitivamente em S^1 é $SO(2)$. Esse grupo é contínuo e conectado, mas não é simplesmente conexo. Seu grupo de recobrimento é o grupo das translações em uma dimensão $T(1)$ cuja as transformações são dadas por $T_\varphi(\theta) = \theta - \varphi$. $T(1)$. Utilizando $T(1)$ ao invés de $SO(2)$, podemos usar o Teo. 5.1. Agora, note que dada uma direção as únicas transformações de $T(1)$ que deixam essa direção invariante são as múltiplas de 2π , $T_{2\pi n}(\theta) = \theta - 2\pi n$ e assim $H = \{T_{2\pi n}, n \in \mathbb{Z}\}$. Ainda, o grupo H_0 é formado somente pela identidade, porque o grupo H é discreto¹⁰. Dessa forma, o grupo H/H_0 é o próprio H que claramente é isomórfico ao grupo \mathbb{Z} munido da adição. Usando o Teo. 5.1, temos que $\pi_1(S^1) \simeq \pi_1(T(1)/H) \simeq H \simeq \mathbb{Z}$. Voltando a Seção 2.1, vemos que os defeitos topológicos dos spins no plano são pontos que são caracterizados pelo lacete da curva no espaço do parâmetro de ordem. Por sua vez, o lacete é um número inteiro e agrupa curvas homotópicas entre si. Assim, o grupo fundamental de S^1 , segundo o que foi explicado na Seção 3, deve ser isomórfico aos números inteiros, que é o resultado que obtivemos.

Para o caso dos spins tridimensionais, um grupo natural que age transitivamente em S^2 é o $SO(3)$, como argumentado na Seção 4. Contudo, este grupo não é simplesmente conexo e precisamos buscar seu grupo de recobrimento. Felizmente, este grupo vem a ser o famoso $SU(2)$ das matrizes 2x2 complexas unitárias de determinante um. $SU(2)$ é simplesmente conexo e o Teo. 5.1 se aplica. O homomorfismo¹¹ entre $SO(3)$ e $SU(2)$ é dado por $\phi : SU(2) \mapsto SO(3)$

$$\phi(U(\hat{\mathbf{n}}, \theta)) = R(\hat{\mathbf{n}}, \theta), \quad (14)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é uma direção arbitrária em 3 dimensões; $0 \leq \theta \leq 4\pi$ um ângulo da rotação; $R(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$ é uma rotação arbitrária em 3 dimensões e

$$U(\hat{\mathbf{n}}, \theta) = e^{i(\theta/2)\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{y}} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{z}}. \quad (15)$$

¹⁰Nos grupos discretos não existem outros caminhos contínuos ligando elementos de H à identidade e , a não ser pelo caminho $h(z) = e, \forall z \in [0, 1]$.

¹¹Homomorfismo é uma correspondência que preserva a lei produto do grupo, mas não é injetora.

Escolhemos a direção z para determinar o subgrupo isotrópico $H_{\hat{\mathbf{z}}}$, cujas transformações são

$$U(\hat{\mathbf{z}}, \theta) = e^{i(\theta/2)\sigma_z} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Apesar da ação de $R(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$ em um vetor \mathbf{S} ser da forma $R(\hat{\mathbf{n}}, \theta)\mathbf{S}$, a ação de $U(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$ é dada por

$$U^\dagger(\hat{\mathbf{n}}, \theta)\sigma_z U(\hat{\mathbf{n}}, \theta) = \mathbf{S} \cdot \sigma, \quad (17)$$

logo, usando a Eq. (16) na Eq. (17) vemos que, de fato, $\mathbf{S} = \hat{\mathbf{z}}$ é deixado invariante:

$$U^\dagger(\hat{\mathbf{z}}, \theta)\sigma_z U(\hat{\mathbf{z}}, \theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & -e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z = \mathbf{S} \cdot \sigma \Leftrightarrow \mathbf{S} = \hat{\mathbf{z}}. \quad (18)$$

Mas, vemos que o subgrupo $H_{\hat{\mathbf{z}}}$ é conectado. Logo, todos os elementos dele são conectados a identidade do grupo. Portanto, $H_0 = H_{\hat{\mathbf{z}}}$ e o grupo $H_{\hat{\mathbf{z}}}/H_0 = 0$, porque não temos nenhum coset. Usando o Teo. 5.1 vemos que $\pi_1(S_3) \simeq \pi_1(SU(2)/H_{\hat{\mathbf{z}}}) \simeq H_{\hat{\mathbf{z}}}/H_0 = 0$. Com efeito, não há defeitos topológicos estáveis para spins em 3 dimensões.

6 Conclusão

Neste passeio pelo formalismo matemático de defeitos topológicos, vimos que o grupo fundamental desempenha o principal papel na teoria, fornecendo informações precisas sobre singularidades do sistema. Fisicamente, este grupo nos fornece novas simetrias do meio. Por conta disto, é de extrema importância procurar pela estrutura topológica do problema em questão, pois isso pode nos revelar novas fases destes sistemas.

Referências

- 1 ANDERSON, P. W. More is different. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 177, n. 4047, p. 393–396, 1972. ISSN 0036-8075. Disponível em: <http://science.sciencemag.org/content/177/4047/393>.
- 2 ANDERSON, P. W. When the electron falls apart. *Physics Today*, v. 50, n. 10, p. 42–47, 1997. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.881959>.
- 3 CHESTER, M.; YANG, L. C.; STEPHENS, J. B. Quartz microbalance studies of an adsorbed helium film. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 29, p. 211–214, Jul 1972. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.29.211>.
- 4 MERMIN, N. D.; WAGNER, H. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic heisenberg models. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 17, p. 1133–1136, Nov 1966. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.17.1133>.
- 5 KOSTERLITZ, J. M.; THOULESS, D. J. Long range order and metastability in two dimensional solids and superfluids. (application of dislocation theory). *Journal of Physics C: Solid State Physics*, v. 5, n. 11, p. L124, 1972. Disponível em: <http://stacks.iop.org/0022-3719/5/i=11/a=002>.

- 6 KOSTERLITZ, J. M.; THOULESS, D. J. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, v. 6, n. 7, p. 1181, 1973. Disponível em: <http://stacks.iop.org/0022-3719/6/i=7/a=010>.
- 7 KOSTERLITZ, J. M. The critical properties of the two-dimensional xy model. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, v. 7, n. 6, p. 1046, 1974. Disponível em: <http://stacks.iop.org/0022-3719/7/i=6/a=005>.
- 8 MERMIN, N. D. The topological theory of defects in ordered media. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 51, p. 591–648, Jul 1979. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.51.591>.
- 9 FERREIRA, L. A. Lecture notes on lie algebras and lie groups. In: _____. São Carlos: [s.n.], 2018. Disponível em: http://ifsc.usp.br/~laf/algebra_2018/notes.pdf. Acesso em: 10 ago. 2018.