Lista 1 - 7600104

1. Recentemente [Nature 491, 207–211 (08 November 2012)], descobriu-se um planeta girando em torno da estrela α-Centauro B (que faz parte do sistema estelar mais próximo do nosso). Verificou-se que o período de translação desse planeta é de $T = 3{,}236$ dias. Sabe-se ainda que a massa dessa estrela é $M = 0.934M_\odot$, onde $M_\odot$ é a massa solar.

   (a) De posse desses dados, o que podemos concluir sobre o raio da órbita desse planeta?

   (b) E sobre a massa do mesmo?
   Dica: Suponha que a massa desse planeta é muito menor que a massa de sua estrela e que a órbita é circular.
   Dados: O período de translação terrestre é de $\tau = 365{,}25$ dias, e a distância Terra-Sol é igual a $R = 1\,\mathrm{UA}$ (unidade astronômica).

2. Duas partículas de massas m_1 e m_2 são soltas do repouso, separadas de uma distância inicial r_0, movendo-se apenas sobre o efeito de sua atração gravitacional mútua. Após um certo intervalo de tempo, essas partículas se encontram separadas de uma distância $r < r_0$. Calcule as velocidades das duas partículas neste instante de tempo.

3. Considere um planeta hipotético de raio R e densidade constante ρ onde há um túnel que passa pelo centro do mesmo ligando dois pontos diametralmente opostos na sua superfície.

   (a) Calcule o período de oscilação de uma partícula que cai do repouso nesse túnel.

   (b) Calcule a velocidade com que essa partícula passaria pelo centro do planeta.

   (c) Calcule a magnitude da força gravitacional planeta-partícula quando a partícula dista de $r < R$ do centro do planeta.

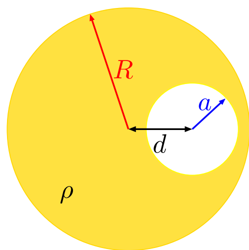
4. No mesmo planeta hipotético do problema 3, há um satélite que o orbita numa órbita circular muito próxima da superfície do mesmo.

   (a) Calcule o período dessa órbita e compare com o período encontrado no item 3a.

   (b) Calcule a velocidade do satélite nessa órbita e compare com a velocidade encontrada no item 3b.

   (c) Qual o valor dessas quantidades para o caso do planeta Terra?

5. Dentro de uma esfera de raio R e densidade ρ há uma cavidade de raio a cujo centro dista de d do centro da esfera (como ilustrado ao lado). Calcule o campo gravitacional (magnitude, direção e sentido) em um ponto qualquer dentro dessa cavidade.



6. Calcule a energia potencial gravitacional total associada a uma esfera homogênea de raio R e massa M.

7. Considere um fio retilíneo de massa M e comprimento L. Alinhado a esse fio, há uma partícula de massa m que dista de D da extremidade mais distante.

   (a) Mostre que a força de atração gravitacional exercida pelo fio sobre a partícula é a mesma que se teria se a massa total do fio estivesse concentrada num único ponto (denominado de centro de gravidade), à distância d da partícula, onde $d = \sqrt{D\,(D-L)}$ é a média geométrica das distâncias da partícula às extremidades do fio.

   (b) Calcule a velocidade de escape correspondente.

8. Duas pequenas espaçonaves, ambas de massa $m = 2\,000\,\mathrm{kg}$, estão na mesma órbita circular em torno da Terra a uma altura de $h = 400\,\mathrm{km}$ acima da superfície. Entretanto, a primeira nave comandada por Kirk está na frente e chega a qualquer ponto da órbita $\Delta t = 90\,\mathrm{s}$ antes da segunda nave comandada por Picard.

(a) Determine o período T_0 e a velocidade v_0 das naves.
Entretanto, num determinado ponto P da órbita, Picard dispara um retrofoguete (de massa muito pequena) na direção tangencial da órbita, reduzindo a velocidade da nave em 1,00%. Depois do disparo, a nave de Picard assume uma órbita elíptica sendo o ponto P o apogeu da mesma.

(b) Determine a energia cinética e potencial gravitacional da nave imediatamente após o disparo.

(c) Na nova órbita elíptica, determine a energia total, o semieixo maior, e o novo período orbital T.

(d) Quanto tempo Picard chega antes de Kirk no ponto P?

(e) Por quais razões o novo período T é menor que T_0?

9. Em um determinado sistema binário de estrelas, duas estrelas descrevem órbitas circulares em torno de seu centro de massa comum.

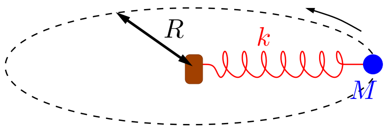
(a) Sendo as estrelas de massas m_1 e m_2 e separadas por uma distância r, mostre que $G\,(m_1 + m_2)\,T^2 = 4\pi^2 r^3$, onde T é o período orbital.

(b) Podemos reescrever esse resultado em termos do sistema Sol-Terra. Sendo $M_\odot$ a massa solar, $T_\oplus$ o período orbital da Terra em torno do Sol, e $R = 1\,\mathrm{UA}$ o raio dessa órbita (circular), mostre que

$$\left(\frac{T}{T_\oplus}\right)^2 = \left(\frac{M_\odot}{m_1 + m_2}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Aplique esse resultado para o sistema binário Sirius A e B. Sabe-se que $m_{\mathrm{SiriusA}} = 2{,}2\,M_\odot$ e $m_{\mathrm{SiriusB}} = 0{,}9\,M_\odot$, e a separação do par é $r = 19{,}9\,\mathrm{UA}$. Finalmente, calcule os raios r_A e r_B das órbitas (circulares) dessas estrelas.

10. Imagine que uma partícula de massa M está sobre uma mesa perfeitamente plana e polida onde pode-se desprezar quaisquer forças dissipativas. Além disso, essa partícula está presa a uma mola de massa desprezível, constante elástica k e comprimento de repouso L cuja outra extremidade está presa a um pivô que pode girar livremente como ilustra a figura ao lado.



(a) A segunda lei de Kepler da gravitação (lei das áreas) é valida para o sistema massa-mola descrito acima? Justifique.

(b) Determine a terceira lei de Kepler (lei dos períodos) equivalente para o sistema massa-mola. Ou seja, determine a relação entre o período T e o raio R da órbita. (Considere que $R \gg L$.)