

## Lista 4 - 7600104

1. Uma partícula de massa  $m$  se move sobre um círculo de raio  $R$  e faz uma volta completa em tempo  $T$ .
  - (a) Qual o módulo da velocidade da partícula?
  - (b) Qual a sua velocidade angular?
  - (c) Escreva uma equação para o componente  $x$  da posição da partícula, em função de  $t$ , admitindo que o vetor posição da partícula faz um ângulo  $\theta_0$  com o eixo  $x$  no instante  $t = 0$ .
  - (d) Faça o gráfico de  $x(t)$  e identifique no mesmo a amplitude e a fase do movimento.
  - (e) Calcule a velocidade  $v(t)$  e a grafique junto com o gráfico de  $x(t)$ . Identifique a fase relativa entre  $x$  e  $v$ .
  - (f) Calcule a aceleração  $a(t)$  e a grafique junto com o gráfico de  $x(t)$ . Identifique a fase relativa entre  $x$  e  $a$ .
  - (g) Agora vamos nos concentrar na força resultante sobre a partícula. Calcule o vetor força resultante com função do tempo.
  - (h) Calcule a componente horizontal do vetor força resultante e compare com a força correspondente a um oscilador harmônico. Qual a constante de mola equivalente? Verifique se seu resultado é compatível com  $ma(t)$ , onde  $a(t)$  foi calculado no item (f).

2. Neste problema, vamos deduzir a expressão da potência média injetada por uma força excitadora num oscilador harmônico forçado unidimensional.

(a) A equação do movimento para o oscilador harmônico unidimensional forçado é  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$ . Identifique o significado físico de cada um dos 4 termos dessa equação.

(b) Mostre que  $x(t) = x_h(t) + A \cos(\Omega t + \delta)$  é solução da equação do movimento onde  $x_h(t)$  (cuja exata expressão não é importante aqui) é solução da equação  $m\ddot{x}_h + b\dot{x}_h + kx_h = 0$ , e  $A$  e  $\delta$  são constantes iguais a

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\Omega^2}}, \text{ e } \tan \delta = \frac{b\Omega}{m(\Omega^2 - \omega_0^2)}, \text{ com } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

- (c) Qual é a interpretação física de  $x_h(t)$ ,  $A$  e  $\delta$ ? Lembre-se que  $x_h(t \gg \tau) \rightarrow 0$ . Quanto vale  $\tau$ ?
- (d) Mostre que, após um transiente ( $t \gg \tau$ ), a potência instantânea da força excitadora é dada por

$$P(t) = F\dot{x} = -A\Omega F_0 \cos(\Omega t) \sin(\Omega t + \delta) = -\frac{1}{2}A\Omega F_0 [\sin(\delta) + \sin(2\Omega t + \delta)].$$

Dica:  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ .

- (e) Finalmente, mostre que o valor médio da potência instantânea é

$$\overline{P} = -\frac{1}{2}A\Omega F_0 \sin(\delta),$$

onde  $\overline{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$ , e  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  é o período da oscilação.

- (f) Finalmente, mostre que

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \frac{b\Omega^2 F_0^2}{m^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + b^2\Omega^2} = \frac{F_0^2}{2m\omega_0} \times \frac{Q}{1 + [Q(\alpha - \alpha^{-1})]^2}, \quad (1)$$

onde  $\alpha = \frac{\Omega}{\omega_0}$  e  $Q = \frac{m\omega_0}{b}$  é o fator de qualidade. A Fig. 1 mostra o valor de  $\overline{P}$  como função de  $\alpha$  para 3 valores distintos de  $Q$ . Note que a potência dissipada se torna uma função cada vez mais estreita (em torno da frequência de ressonância  $\omega_0$ ) conforme o fator de qualidade aumenta.

3. A largura de uma curva de ressonância  $\Delta\Omega$  é definida como a diferença entre as frequências máximas e mínimas quando a potência dissipada é metade do valor da potência máxima (como ilustra a Fig. 1 para o caso de  $Q = 2$ ). Comumente, diz-se que essa é a largura em meia altura.

Vamos usar os resultados do problema anterior para mostrar que há uma relação muito simples entre essa largura e o fator de qualidade dada por  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$ . Essa expressão é aproximada e é válida apenas quando a ressonância é aguda. Na ressonância, o denominador da Eq. (1) é  $b^2\Omega^2 =$

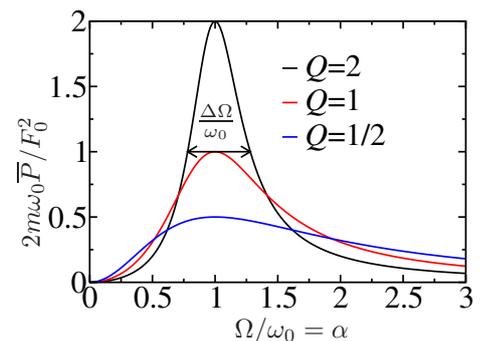


Figura 1: Potência média  $\overline{P}$  como função da frequência de oscilação da força externa  $\Omega$  para 3 valores diferentes de fator de qualidade  $Q$ . (Note que para valores altos de  $Q$ , a curva é bem estreita.)

$b^2\omega_0^2$  e  $\bar{P}$  tem o seu valor máximo. Numa ressonância aguda, a variação de  $\Omega$  no numerador da Eq. (1) é muito pequena (ou seja,  $\Delta\Omega \ll \omega_0$ ) e pode ser desprezada. Evidentemente, a potência é a metade do seu valor máximo nos valores de  $\Omega$  para os quais se possa escrever  $2b^2\Omega^2$  como o valor do denominador.

(a) Mostrar que, nestas circunstâncias,  $\Omega$  obedece a

$$m^2 (\Omega - \omega_0)^2 (\Omega + \omega_0)^2 \approx b^2 \omega_0^2.$$

(b) Com a aproximação  $\Omega + \omega_0 = 2\omega_0$ , mostrar que

$$\Omega - \omega_0 \approx \pm \frac{b}{2m}.$$

(c) Usando a definição  $Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = 2\pi \frac{m}{bT} = 2\pi \frac{\tau}{T}$ , mostre que  $Q$  está relacionado a  $b$  e a  $m$  por

$$Q = \frac{m\omega_0}{b}.$$

(d) Combinar os resultados de (b) e de (c) para mostrar que existem dois valores de  $\Omega$  para os quais a potência é igual à metade da potência na ressonância e que estes dois valores são

$$\Omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q}, \text{ e } \Omega_2 = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}.$$

Então,  $\Omega_2 - \Omega_1 = \Delta\Omega = \frac{\omega_0}{Q}$  o que é equivalente à equação  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$ .

4. Um oscilador amortecido tem uma frequência  $\omega$  que é 10% menor que a frequência do oscilador sem amortecimento.

- (a) Qual o fator de decréscimo da amplitude em cada oscilação?  
 (b) Qual o fator de redução da energia em cada oscilação?

5. Um túnel retilíneo é perfurado na terra, como mostra a Fig. 2.

(a) Desprezando quaisquer forças dissipativas, mostre que a força resultante que atua sobre uma partícula de massa  $m$  à distância  $x$  do centro do túnel é dada por  $F_x = -kx$ , onde  $k = (GmM_T/R_T^3)$ ,  $G$  é a constante gravitacional,  $M_T$  é a massa da Terra, e  $R_T$  o seu raio.

(b) Mostre que o período do movimento é  $T = 2\pi(R_T/g)^{\frac{1}{2}}$  e ache o seu valor. (Este também é o período de um satélite em órbita nas vizinhanças da superfície da terra e é independente do tamanho do túnel.)

(c) Suponha que esse túnel ligue duas cidades conhecidas por você. Qual a aceleração máxima que a partícula experimenta durante a viagem?

(d) Suponha que haja uma força viscosa atuando na partícula igual a  $F_{\text{visc}} = -b\dot{x}$  onde  $b = 100 \text{ kg/s}$ . Para que valores de massa o movimento é sub-amortecido?

(e) Um trem sem motor de  $m = 80 \text{ ton}$  entra nesse túnel com velocidade nula está sujeito à força viscosa do item anterior. Em quanto tempo ele chega ao centro do túnel?

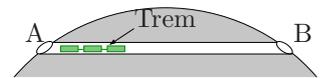


Figura 2: Túnel planetário.

6. Um pêndulo simples de comprimento  $L$  parte do repouso com um ângulo inicial com a vertical igual a  $\theta_0$ .

(a) Com a hipótese de o movimento ser harmônico simples, ache a a velocidade do pêndulo quando ele passa por  $\theta = 0$ .

(b) Com a conservação da energia, achar exatamente esta velocidade.

(c) Mostrar que os resultados das partes (a) e (b) se tornam aproximadamente iguais quando  $\theta_0$  for pequeno.

(d) Achar a diferença nos dois resultados quando  $\theta_0 = 0,20 \text{ rad}$  e  $L = 1 \text{ m}$ .

7. Um relógio de pêndulo simples é ajustado de modo a ter um andamento exato quando a amplitude angular for  $\theta_0 = 10^\circ$ . Quando a amplitude tiver diminuído até o ponto de ser muito pequena, de quanto adianta o relógio em um dia? Dado: o período de um pêndulo simples com amplitudes maiores de oscilação é dado por  $T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{3}{4} \right)^2 \sin^4 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) + \dots \right)$ , onde  $T_0$  é o período idealizado para pequenas oscilações.

8. Considere um corpo plano como ilustra a Fig. 3. O momento de inércia desse corpo em relação a um eixo que é perpendicular ao plano do mesmo e atravessa o seu centro de massa é conhecido e igual a  $I_{CM}$ . Quando esse corpo oscila em torno de um eixo perpendicular ao plano do mesmo e que atravessa o ponto  $P_1$  (que dista de  $h_1$  do centro de massa), nota-se que o período de oscilação (para pequenas oscilações) é  $T$ .

Existe um segundo ponto  $P_2$ , a uma distância  $h_2 \neq h_1$  do centro de massa, tal que, se posto para oscilar por um eixo perpendicular ao plano do corpo e que atravessa esse ponto  $P_2$ , o período de pequenas oscilações também é  $T$ .

Mostre que  $h_1 + h_2 = gT^2/4\pi^2$ .

9. Uma aranha, de massa 0,36 g, desce por um fio que cede 3,00 mm por causa de seu peso. Por razões obscuras, um certo inseto de massa 0,06 g voa a 10 cm/s de cima para baixo ao longo do fio e é capturado pela aranha. Em seguida, ambos oscilam ao longo da vertical. Desprezando quaisquer forças dissipativas, calcule

- a frequência de oscilação, e
- a amplitude do movimento.

10. A aceleração da gravidade  $g$  varia com a localização sobre a superfície da Terra em virtude da rotação da Terra e também por a Terra não ser exatamente esférica e homogênea. Esta variação foi descoberta no século XVII, quando se percebeu que um relógio de pêndulo, cuidadosamente regulado para manter a medição correta do tempo em Paris, perdia cerca de 90 s/dia nas vizinhanças do equador.

- Mostrar que uma pequena variação da aceleração da gravidade  $\Delta g$  provoca uma pequena variação  $\Delta T$  no período de um pêndulo, dada por  $\Delta T/T \approx -(\Delta g/2g)$ . (Usar diferenciais para aproximar  $\Delta T$  e  $\Delta g$ .)
- Qual a variação de  $g$  que provoca a variação de 90 s/dia no período do pêndulo?

11. Um pêndulo simples de comprimento  $L$  está preso a um carrinho de massa muito grande que desce um plano inclinado, sem atrito, que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal. Determine a frequência de pequenas oscilações para esse pêndulo.

12. Um pêndulo é constituído de uma barra muito fina e perfeitamente rígida de massa desprezível e comprimento  $\ell$  e de uma esfera de raio  $R$  (com  $R \ll \ell$ ) e massa  $m$ . A uma distância  $\alpha\ell$  (com  $0 < \alpha < 1$ ) do eixo de rotação, anexa-se uma mola muito grande, de massa desprezível, e de constante elástica  $k$  que está em equilíbrio com a posição de repouso ( $\theta = 0$ ) do pêndulo (vide Fig. 4). O sistema é então posto para oscilar. Para as perguntas que se seguem, considere o limite de pequenas oscilações ( $\theta \ll 1$ ).

- Calcule a energia mecânica total do sistema como função de  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ .
- Comparando com a energia mecânica de um oscilador harmônico  $E = A(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) + B$  (onde os valores de  $A$  e  $B$  são irrelevantes aqui, exceto pelo fato de que  $A > 0$ ), calcule a frequência angular  $\omega$  correspondente.
- Escreva a equação de movimento para o ângulo  $\theta$ .
- Calcule a frequência angular  $\omega$  correspondente e compare com a resposta do item (b).
- Suponha agora que o sistema se encontre imerso em um líquido de viscosidade  $\eta$  proporcionando uma força sobre a esfera igual a  $\vec{F}_{\text{visc}} = -6\pi\eta R\vec{v}$ , onde  $\vec{v}$  é o vetor velocidade da esfera. Qual é a nova equação de movimento para o ângulo  $\theta$ ?

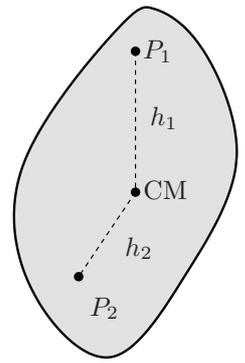


Figura 3: Pêndulo físico.

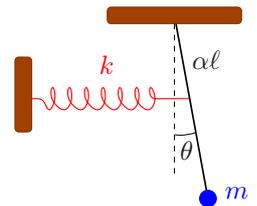


Figura 4: Sistema pêndulo-mola.