Vibrações e Ondas - 7600025 - 1S/2020
Lista 1

1. Uma partícula de massa m se move sobre um círculo de raio R e faz uma volta completa em tempo T.

(a) Qual o módulo da velocidade da partícula?

(b) Qual a sua velocidade angular?

(c) Escreva uma equação para o componente x da posição da partícula, em função de t, admitindo que o vetor posição da partícula faz um ângulo θ_0 com o eixo x no instante $t = 0$.

(d) Faça o gráfico de $x(t)$ e identifique no mesmo a amplitude e a fase do movimento.

(e) Calcule a velocidade $v(t) = \dot{x}$ e trace seu gráfico junto com o de $x(t)$. Identifique a fase relativa entre x e v.

(f) Calcule a aceleração $a(t) = \dot{v}$ e trace seu gráfico junto com o de $x(t)$. Identifique a fase relativa entre x e a.

(g) Agora vamos nos concentrar na força resultante sobre a partícula. Calcule o vetor força resultante com função do tempo.

(h) Calcule a componente horizontal do vetor força resultante e compare com a força correspondente a um oscilador harmônico. Qual a constante de mola equivalente? Verifique se seu resultado é compatível com $ma(t)$.

2. Uma aranha, de massa 0,36 g, desce por um fio que cede 3,00 mm por causa de seu peso. Por razões obscuras, um certo inseto de massa 0,06 g voa a 10 cm/s de cima para baixo ao longo do fio e é capturado pela aranha. Em seguida, ambos oscilam ao longo da vertical. Desprezando quaisquer forças dissipativas, calcule

(a) a frequência de oscilação, e

(b) a amplitude do movimento.

3. Uma partícula oscila harmonicamente simples entre as posições $-A \leq x \leq A$. Mostre que a probabilidade de encontrá-la entre as posições x e $x + \mathrm{d}x$ é

$$\frac{\mathrm{d}x}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

4. Um bloco de massa M está suspenso por meio de uma mola de massa m e constante k. Como a massa da mola não é desprezível em relação a do bloco, a frequência de oscilação não será $\omega_0 = \sqrt{k/M}$. Para calcular a correta frequência de oscilação, devemos incluir a energia cinética da mola quando da oscilação do bloco. Um elemento infinitesimal de massa que dista de y da extremidade fixa oscila com velocidade $v_y = yv/L$, onde v é a velocidade do bloco e L é o comprimento da mola quando não está oscilando. Além disso, a massa desse elemento é igual a $m\mathrm{d}y/L$.

(a) Integrando para todos os elementos de massa, mostre que a energia cinética total da mola é $\frac{1}{6}mv^2$.

(b) Escreva a energia total do sistema e conclua que a frequência de oscilação é $\omega = \sqrt{k/\tilde{M}}$, onde $\tilde{M} = M + \frac{1}{3}m$.

5. Considere um corpo plano como ilustra a Fig. 1. O momento de inércia desse corpo em relação a um eixo que é perpendicular ao plano do mesmo e atravessa o seu centro de massa é conhecido e igual a I_{CM}. Quando esse corpo oscila em torno de um eixo perpendicular ao plano do mesmo e que atravessa o ponto P_1 (que dista de h_1 do centro de massa), nota-se que o período de oscilação (para pequenas oscilações) é T. Existe um segundo ponto P_2, a uma distância $h_2 \neq h_1$ do centro de massa, tal que, se posto para oscilar por um eixo perpendicular ao plano do corpo e que atravessa esse ponto P_2, o período de pequenas oscilações também é T. Mostre que $h_1 + h_2 = gT^2/4\pi^2$.

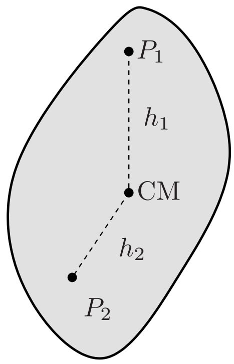

Figura 1: Pêndulo físico.

6. Um pêndulo simples de comprimento L parte do repouso com um ângulo inicial com a vertical igual a θ_0.

(a) Com a hipótese do movimento ser harmônico simples, ache a a velocidade do pêndulo quando ele passa por $\theta = 0$.

(b) Com a conservação da energia, achar exatamente esta velocidade.

(c) Mostrar que os resultados das partes (a) e (b) se tornam aproximadamente iguais quando θ_0 for pequeno.

(d) Achar a diferença nos dois resultados quando $\theta_0 = 0{,}20$ rad e $L = 1$ m.

7. Um relógio de pêndulo simples é ajustado de modo a ter um andamento exato quando a amplitude angular for $\theta_0 = 10°$.

(a) Quando a amplitude tiver diminuído até o ponto de ser muito pequena, de quanto adianta o relógio em um dia? Dado: o período de um pêndulo simples com amplitudes maiores de oscilação é dado por $T = T_0\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \dots\right)$, onde T_0 é o período idealizado para pequenas oscilações.

(b) Usando que a energia total do sistema é uma constante igual a

$$E = mgL\left(1 - \cos\theta_0\right) = \frac{1}{2}I\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgL\left(1 - \cos\theta\right),$$

onde $I = mL^2$ é o momento de inércia correspondente, mostre que $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$ recupera a equação do movimento.

(c) Ainda usando a conservação de energia, mostre que

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)},$$

com o sinal $\pm$ se referindo aos instantes em que θ é positivo e negativo. Por simetria do movimento, $\frac{1}{4}T$ é o tempo necessário para θ ir de 0 até θ_0. Portanto, mostre que o período do movimento é

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\sin^2\frac{\theta_0}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Sendo $\mathrm{sen}u = \frac{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}{k}$, onde $k = \mathrm{sen}\frac{\theta_0}{2}$, mostre que

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - k^2\mathrm{sen}^2 u}}.$$

Note que T não depende de m.

É interessante expandir essa integral para $k \ll 1$ (que corresponde limite harmônico de pequenas amplitudes $\theta_0 \ll 1$). Logo,

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - k^2\mathrm{sen}^2 u}} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\left(1 + \frac{\mathrm{sen}^2 u}{2}k^2 + \frac{3\mathrm{sen}^4 u}{8}k^4 + \frac{5\mathrm{sen}^6 u}{16}k^6 + \dots\right)\mathrm{d}u \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \frac{25}{256}k^6 + \dots\right) \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{1}{3\,072}\theta_0^4 + \frac{173}{737\,280}\theta_0^6 + \dots\right). \end{aligned}$$

8. Um oscilador amortecido tem uma frequência ω que é 10% menor que a frequência do oscilador sem amortecimento.

(a) Qual o fator de decréscimo da amplitude em cada oscilação?

(b) Qual o fator de redução da energia em cada oscilação?

9. Neste problema, vamos deduzir a expressão da potência média injetada por uma força excitadora num oscilador harmônico forçado unidimensional.

(a) A equação do movimento para o oscilador harmônico unidimensional forçado é $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0\cos\Omega t$. Identifique o significado físico de cada um dos 4 termos dessa equação.

(b) Mostre que $x(t) = x_h(t) + A\cos\left(\Omega t + \delta\right)$ é solução da equação do movimento onde $x_h(t)$ (cuja exata expressão não é importante aqui) é solução da equação $m\ddot{x}_h + b\dot{x}_h + kx_h = 0$, e A e δ são constantes iguais a

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + b^2\Omega^2}}, \text{ e } \tan\delta = \frac{b\Omega}{m\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)}, \text{ com } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

(c) Qual é a interpretação física de $x_h(t)$, A e δ? Lembre-se que $x_h(t \gg \tau) \to 0$. Quanto vale τ?

(d) Mostre que, após um transiente ($t \gg \tau$), a potência instantânea da força excitadora é dada por

$$P(t) = F\dot{x} = -A\Omega F_0 \cos(\Omega t) \sin(\Omega t + \delta) = -\frac{1}{2} A\Omega F_0 \left[\sin(\delta) + \sin(2\Omega t + \delta)\right].$$

Dica: $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

(e) Finalmente, mostre que o valor médio da potência instantânea é

$$\overline{P} = -\frac{1}{2} A\Omega F_0 \sin(\delta),$$

onde $\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\mathrm{d}t$, e $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ é o período da oscilação.

(f) Finalmente, mostre que

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \frac{b\Omega^2 F_0^2}{m^2\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + b^2\Omega^2} = \frac{F_0^2}{2m\omega_0} \times \frac{Q}{1 + \left[Q\left(\alpha - \alpha^{-1}\right)\right]^2}, \qquad (1)$$

onde $\alpha = \frac{\Omega}{\omega_0}$ e $Q = \frac{m\omega_0}{b}$ é o fator de qualidade. A Fig. 2 mostra o valor de $\overline{P}$ como função de α para 3 valores distintos de Q. Note que a potência dissipada se torna uma função cada vez mais estreita (em torno da frequência de ressonância ω_0) conforme o fator de qualidade aumenta.

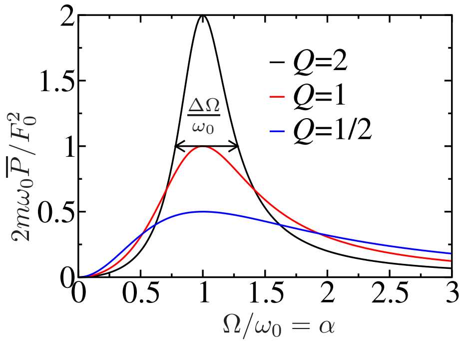

Figura 2: Potência média $\overline{P}$ como função da frequência de oscilação da força externa Ω para 3 valores diferentes de fator de qualidade Q. (Note que para valores altos de Q, a curva é bem estreita.)

10. A largura de uma curva de ressonância $\Delta\Omega$ é definida como a diferença entre as frequências máximas e mínimas quando a potência dissipada é metade do valor da potência máxima (como ilustra a Fig. 2 para o caso de $Q = 2$). Comumente, diz-se que essa é a largura em meia altura.

Vamos usar os resultados do problema anterior para mostrar que há uma relação muito simples entre essa largura e o fator de qualidade dada por $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$. Essa expressão é aproximada e é válida apenas quando a ressonância é aguda. Na ressonância, o denominador da Eq. (1) é $b^2\Omega^2 = b^2\omega_0^2$ e $\overline{P}$ tem o seu valor máximo. Numa ressonância aguda, a variação de Ω no numerador da Eq. (1) é muito pequena (ou seja, $\Delta\Omega \ll \omega_0$) e pode ser desprezada. Evidentemente, a potência é a metade do seu valor máximo nos valores de Ω para os quais se possa escrever $2b^2\Omega^2$ como o valor do denominador.

(a) Mostrar que, nestas circunstâncias, Ω obedece a

$$m^2\left(\Omega - \omega_0\right)^2\left(\Omega + \omega_0\right)^2 \approx b^2\omega_0^2.$$

(b) Com a aproximação $\Omega + \omega_0 = 2\omega_0$, mostrar que

$$\Omega - \omega_0 \approx \pm\frac{b}{2m}.$$

(c) Usando a definição $Q = 2\pi\frac{E}{\Delta E} = 2\pi\frac{m}{bT} = 2\pi\frac{\tau}{T}$, mostre que Q está relacionado a b e a m por

$$Q = \frac{m\omega_0}{b}.$$

(d) Combinar os resultados de (b) e de (c) para mostrar que existem dois valores de Ω para os quais a potência é igual à metade da potência na ressonância e que estes dois valores são

$$\Omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q}, \text{ e } \Omega_2 = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}.$$

Então, $\Omega_2 - \Omega_1 = \Delta\Omega = \frac{\omega_0}{Q}$ o que é equivalente à equação $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$.

11. A aceleração da gravidade g varia com a localização sobre a superfície da Terra em virtude da rotação da Terra e também por a Terra não ser exatamente esférica e homogênea. Esta variação foi descoberta no século XVII, quando se percebeu que um relógio de pêndulo, cuidadosamente regulado para manter a medição correta do tempo em Paris, perdia cerca de 90 s/dia nas vizinhanças do equador.

(a) Mostre que uma pequena variação da aceleração da gravidade Δg provoca uma pequena variação ΔT no período de um pêndulo, dada por $\Delta T/T \approx -(\Delta g/2g)$. (Dica: Use diferenciais para aproximar ΔT e Δg.)

(b) Qual a variação de g que provoca a variação de 90 s/dia no período do pêndulo?

12. Um pêndulo simples de comprimento L está preso a um carrinho de massa muito grande que desce um plano inclinado, sem atrito, que forma um ângulo θ com a horizontal. Determine a frequência de pequenas oscilações para esse pêndulo.

13. Um pêndulo é constituído de uma barra muito fina e perfeitamente rígida de massa desprezível e comprimento ℓ e de uma esfera de raio R (com $R \ll \ell$) e massa m. A uma distância $\alpha\ell$ (com $0 < \alpha < 1$) do eixo de rotação, anexa-se uma mola muito grande, de massa desprezível, e de constante elástica k que está em equilíbrio com a posição de repouso ($\theta = 0$) do pêndulo (vide Fig. 3). O sistema é então posto para oscilar. Para as perguntas que se seguem, considere o limite de pequenas oscilações ($\theta \ll 1$).

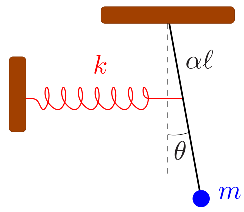

Figura 3: Sistema pêndulo-mola.

(a) Calcule a energia mecânica total do sistema como função de θ e $\dot{\theta}$.

(b) Comparando com a energia mecânica de um oscilador harmônico $E = A\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right) + B$ (onde os valores de$A$ e B são irrelevantes aqui, exceto pelo fato de que $A > 0$), calcule a frequência angular ω correspondente.

(c) Escreva a equação de movimento para o ângulo θ.

(d) Calcule a frequência angular ω correspondente e compare com a resposta do item (b).

(e) Suponha agora que o sistema se encontre imerso em um líquido de viscosidade η proporcionando uma força sobre a esfera igual a $\vec{F}_{\text{visc}} = -6\pi\eta R\vec{v}$, onde $\vec{v}$ é o vetor velocidade da esfera. Qual é a nova equação de movimento para o ângulo θ?