

Vibrações e Ondas - 7600025 - 1S/2020
Lista 4

1. Uma corda de violino, de comprimento 40 cm e massa 1,2 g vibra a 500 Hz na frequência fundamental.
 - (a) Qual o comprimento de onda da onda estacionária na corda?
 - (b) Qual a tração na corda?
 - (c) Onde a corda deve ser presa pelo dedo para que a frequência da vibração seja 650 Hz?
2. Um alfinete de 0,1 g cai de uma altura de 1 m, 0,05% da sua energia mecânica se converte num pulso sonoro que tem a duração de 0,1 s.
 - (a) Estime a distância máxima a que se pode ouvir a queda do alfinete admitindo que a intensidade mínima audível seja de aproximadamente 10 pW/m^2 .
 - (b) Analisando o gráfico da Fig. 1, a que frequência (ou frequências) corresponderia o som dessa queda?
 - (c) O resultado conseguido em 2a é provavelmente exagerado em virtude do ruído de fundo que existe no ambiente. Admitindo que o nível de intensidade deva ser de pelo menos 40 dB para que um som possa ser ouvido, estime a distância a que se pode ouvir a queda do alfinete.
OBS.: Por simplicidade, admita que a intensidade seja $P/4\pi r^2$.
3. Um alto-falante, num concerto de rock, gera $1,0 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2$ a 20 m, na frequência de 1,0 kHz. Vamos admitir que o alto-falante emita uniformemente a sua energia no hemisfério frontal e que não haja energia refletida pelo solo ou por outros obstáculos de modo que a intensidade do som possa ser estimada por $I = P/2\pi r^2$.
 - (a) Qual o nível de intensidade a 20 m? Dê sua resposta em decibéis e em “phons”, a escala de intensidade definida na Fig. 1.
 - (b) Qual a potência acústica total emitida pelo alto-falante nessa frequência?
 - (c) A que distância o nível de intensidade atingirá o limiar máximo da audição dolorosa, 120 dB?
 - (d) Qual o nível de intensidade a 30 m? Dê sua resposta em W/m^2 , em decibéis e em “phons”.
 - (e) Qual a amplitude do deslocamento das partículas de ar nessa distância?
 - (f) O que mudaria nas suas respostas se o alto-falante gerasse 10^{-2} W/m^2 de potência a 20 m de distância na frequência de 2 kHz?
4. Considere uma fonte que emite uma onda sonora a 200 Hz e se desloca com uma velocidade de 80 m/s em relação ao ar tranquilo na direção de um ouvinte estacionário. Sendo a velocidade de propagação do som no ar tranquilo igual a 340 m/s,
 - (a) ache o comprimento de onda do som entre a fonte e o ouvinte. Ache frequência ouvida pelo ouvinte.

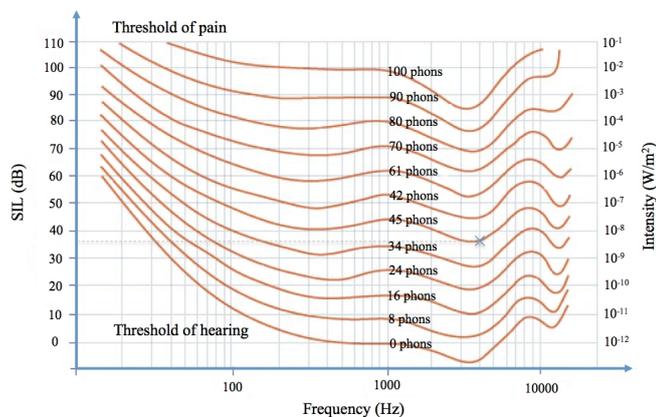


Figura 1: A escala decibel e a sensibilidade do ouvido humano.

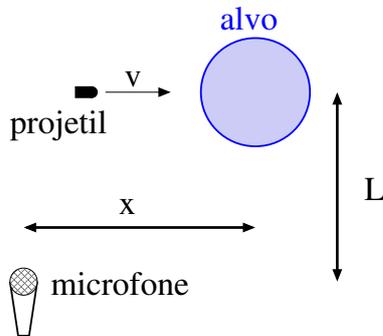


Figura 2: Desenho esquemático de um dispositivo fotográfico de exposição rápida.

- (b) Considere a situação no referencial onde a fonte está em repouso. Neste referencial, o ouvinte se move na direção da fonte, com a velocidade de 80 m/s, e há um vento soprando, a 80 m/s, do ouvinte para a fonte. Qual a velocidade do som, neste referencial entre o ouvinte e a fonte? Ache o comprimento de onda do som entre a fonte e o ouvinte. Ache a frequência percebida pelo ouvinte. Considere agora que é o ouvinte se move a 80 m/s em relação ao ar tranquilo na direção da fonte que está estacionária.
- (c) Qual o comprimento de onda do som entre a fonte e o ouvinte? Qual a frequência percebida pelo ouvinte?
- (d) Considere a situação no referencial do ouvinte. Qual a velocidade do vento neste referencial? Qual a velocidade do som, entre a fonte e o ouvinte neste referencial, isto é, em relação ao ouvinte?
- (e) Ache o comprimento de onda do som entre a fonte e o ouvinte neste referencial. Ache a frequência ouvida pelo ouvinte.
5. Um dispositivo fotográfico de exposição rápida, projetado para fotografar um projétil explodindo um determinado alvo, está ilustrado na Fig. 2. A onda de choque do projétil, detectada pelo microfone, é usada para acionar o dispositivo fotográfico. Sendo que a velocidade do projétil é $v = \alpha c$, onde c é a velocidade do som no ar e $\alpha > 1$ é uma constante, a que distância x o microfone deve ser colocado para que o dispositivo funcione apropriadamente?
6. Usando o princípio de Fermat da óptica (que diz que a luz vai de um ponto ao outro pelo caminho que leva o menor tempo), deduza a lei de Snell.
7. Duas fontes puntiformes A e B que emitem ondas harmônicas em fase estão separadas por uma distância d conforme ilustra a Fig. 3. Percebe-se um padrão de interferência sobre um anteparo paralelo à reta suporte das fontes e situada à distância D (bastante grande) de cada fonte.
- (a) Mostre que a diferença de percurso das duas fontes a um ponto sobre o anteparo, fazendo o ângulo θ com a vertical, é aproximadamente

$$\Delta x = d \sin \theta.$$

- (b) Mostre que a distância y_m entre o máximo central e o m -ésimo máximo a vertical é aproximadamente

$$y_m = m \frac{D\lambda}{d}.$$

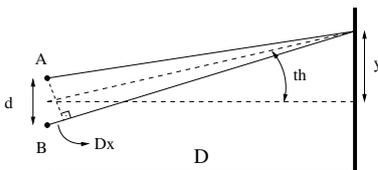


Figura 3: Interferência entre duas fontes.

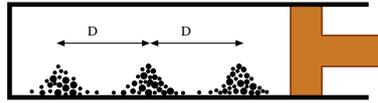


Figura 4: Desenho esquemático do tubo de Kundt.

- (c) Considere agora que essas fontes emitem ondas sonoras e distam de $D = 2\text{ m}$ de um anteparo. Observe pela primeira vez a interferência construtiva sob um ângulo $\theta_1 = 0,140\text{ rad}$ e depois sob o ângulo $\theta_1 = 0,282\text{ rad}$.
Qual o comprimento dessas ondas sonoras? (Note que esses ângulos não são muito pequenos e, portanto, as simples aproximações dos itens anteriores não se aplicam.)
- (d) Qual a frequência correspondente?
- (e) Em que outros ângulos se perceberá também a interferência construtiva?
- (f) Qual o menor ângulo para o qual as ondas sonoras se cancelam completamente?
8. As funções de onda de duas ondas estacionárias, numa corda de comprimento L e densidade μ , são
- $$y_1(x, t) = A_1 \cos(\omega_1 t) \sin(k_1 x) \text{ e } y_2(x, t) = A_2 \cos(\omega_2 t) \sin(k_2 x),$$
- onde $k_n = n\pi/L$ e $\omega_n = n\omega_1$. A função de onda resultante é $y_r(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$.
- (a) Ache a velocidade de um segmento dx da corda situado a uma distância x da origem.
- (b) Ache a energia cinética deste segmento.
- (c) Por integração, calcule a energia cinética total da onda resultante. (Observe o desaparecimento dos termos com os produtos cruzados.)
- (d) Por que a energia cinética total não é constante no tempo? Quanto vale a energia total do sistema? Justifique.
9. Três ondas de mesma frequência ω , mesmo comprimento de onda k e mesma amplitude A estão se deslocando numa mesma direção. A fase da primeira onda é zero, a da segunda onda é ϕ , e a da terceira onda é $-\phi$. Ache a frequência, comprimento de onda, amplitude e fase da onda resultante.
10. Uma corda uniforme, de 20 m de comprimento e massa de 2,0 kg, está esticada sob uma tensão de 10 N. No instante $t_0 = 0$, faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com amplitude de 3,0 cm e frequência de 5,0 oscilações por segundo. O deslocamento inicial da extremidade é para cima.
- (a) Ache a velocidade de propagação v e comprimento de onda λ da onda progressiva gerada na corda.
- (b) Escreva, como função de tempo t , o deslocamento transversal y de um ponto da corda situado à distância x da extremidade. Considere apenas tempos tais que $t_0 < t < t_0 + \Delta t$, onde Δt é o intervalo de tempo que leva para que o primeiro pulso chegue na outra extremidade da corda.
- (c) Calcule a potência da onda progressiva gerada.
11. A mesma corda descrita no problema anterior está com uma extremidade amarrada num poste. A outra extremidade, inicialmente em repouso na posição de equilíbrio, é deslocada de 10 cm para cima, com velocidade uniforme, entre 0 e 0,5 s. Logo em seguida, é deslocada para baixo com a magnitude da velocidade reduzida à metade da anterior até retornar à posição de equilíbrio. Desenhe a forma da corda nos instantes 1,7 s, 2,6 s, 3,8 s, e 4,5 s.
12. Dois estudantes, cada qual com um diapasão de 440 Hz, afastam-se um do outro com velocidades iguais (em relação ao ar tranquilo). Qual deve ser a velocidade de cada um para que ouçam uma frequência de batimento de 2 Hz? (Note que a resposta depende das orientações dos estudantes e dos diapasões. Escolha conforme a sua conveniência.)
13. Um túnel reto em uma montanha amplifica grandemente sons de 135 e de 138 Hz. Determine o menor comprimento possível do túnel.

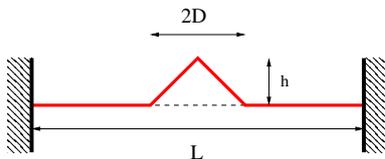


Figura 5: Corda tensionada presa nos extremos.

14. O tubo de Kundt, que costumava ser empregado para medir a velocidade do som em gases, é um tubo de vidro fechado em ambas extremidades (vide Fig. 4). Em uma delas, pode-se acoplar, por exemplo, um alto-falante onde uma onda sonora de frequência ν conhecida excita ondas estacionárias no tubo. A outra extremidade é um pistão que se faz deslizar, variando o comprimento do tubo. O tubo contém um pó fino (serragem, por exemplo). Ajusta-se o comprimento do tubo até que ele entre em ressonância com a frequência ν , que se nota pelo reforço da intensidade sonora emitida. Observa-se então que o pó fica acumulado em montículos igualmente espaçados, de espaçamento $\Delta\ell$.

- A que correspondem as posições dos topos dos montículos? (Nós ou antinós? De pressão, densidade ou deslocamento?) Haverá montículos nas extremidades do tubo?
- Qual é a relação entre $\Delta\ell$, ν e a velocidade do som no gás v_g ?
- Com o tubo cheio de CO_2 a 20°C e $\nu = 880\text{ Hz}$, o espaçamento médio medido é de $15,2\text{ cm}$. Qual é a velocidade do som correspondente?

15. Uma onda matematicamente não patológica pode ser escrita como uma superposição de ondas harmônicas de diferentes frequências. Considere a função definida por

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right).$$

É interessante aproximar essa soma infinita por uma soma finita, ou seja, vamos considerar que a soma vá de 0 até k .

- Faça o gráfico dessa função para os valores de x entre 0 e 4π , e para valores de $k = 0, 1, 2, 10$ e 100 .
- Analisando os gráficos do item anterior, qual é a onda (função) obtida da soma infinita?
- Qual é a relação entre esta função e a série de Leibnitz para o π ,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots?$$

16. Considere uma corda de densidade μ e tamanho L presa sob tensão $T = \mu c^2$ como ilustra a Fig. 5. Inicialmente, as condições de posição e velocidade são

$$y(x, 0) = h \begin{cases} 0, & |x - \frac{1}{2}L| \geq D, \\ 1 - |x - \frac{1}{2}L|/D, & |x - \frac{1}{2}L| < D, \end{cases} \quad \text{e} \quad \dot{y}(x, 0) = \frac{h}{D}c \begin{cases} 0, & |x - \frac{1}{2}L| \geq D, \\ \text{senal}(x - \frac{1}{2}L), & |x - \frac{1}{2}L| < D, \end{cases} \quad (1)$$

- Calcule as ondas propagantes e contra-propagantes f e g a partir das condições iniciais imaginando que a corda é infinita ($L \rightarrow \infty$).
- Quais são as condições de contorno correspondentes que devem ser satisfeitas?
- Incorporando as condições de contorno, calcule finalmente $y(x, t)$. Represente sua solução graficamente incluindo posições além de $|x - \frac{1}{2}L| < L/2$.
- Dadas as condições de contorno do item 16b, quais são os modos normais correspondentes (vetor de onda k_n e frequência ω_n).
- Dadas as condições iniciais $y(x, 0)$ e $\dot{y}(x, 0)$ em (1), determine o movimento subsequente da corda $y(x, t)$ em termos dos modos normais, i.e., sendo

$$y(x, t) = \sum_n a_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t - \phi_n), \quad (2)$$

determine as amplitudes a_n e fases ϕ_n . Compare o seu resultado com aquele do item 16c.

- (f) Faça um gráfico de a_n como função de k_n , e calcule a relação de incerteza $\Delta x \Delta k$ como função do tempo.
17. Considere uma corda homogênea de densidade ρ perfeitamente elástica sob a ação de uma força externa e tracionada de T .
- (a) Derive a equação de onda correspondente.
 - (b) Especialize o seu resultado para uma corda presa pelas suas extremidades sob a ação da gravidade. Como a velocidade da onda é modificada pela ação da gravidade? Para o caso da corda estática, determine $y(x)$. Por que este resultado é distinto da catenária?
 - (c) Considere agora que a força externa é restauradora (i.e., sobre um elemento de massa $dm = \rho dx$, $dF = -\kappa y dx$ onde κ é uma constante). Determine os modos normais e a relação de dispersão correspondente. (Neste caso, a equação de onda é conhecida como a equação de Klein-Gordon.) Qual a relação entre as velocidades de fase e de grupo?