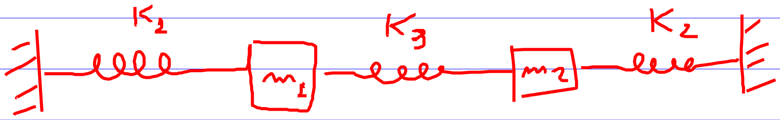
OSCILADORES HARMÔNICOS ACOPLADOS



$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -b_1 \dot{x}_1 - K_1 x_1 - K_3 (x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -b_2 \dot{x}_2 - K_2 x_2 - K_3 (x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 \frac{d^2}{dt^2} + b_1 \frac{d}{dt} + K_1 + K_3 & -K_3 \\ -K_3 & m_2 \frac{d^2}{dt^2} + b_2 \frac{d}{dt} + K_2 + K_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

MÉTODO GERAL

$$x_j = A_j e^{\lambda t}$$

(ANÁLOGO AO CASO DE 1 OH)

P/ CADA SOLUÇÃO POSSÍVEL, A SOLUÇÃO GERAL É UMA SUPERPOSIÇÃO DE TODAS

$$\begin{cases} x_1 = A_1^{(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + A_1^{(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} + \dots \\ x_2 = A_2^{(\lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + A_2^{(\lambda_2)} e^{\lambda_2 t} + \dots \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 \lambda^2 + b_1 \lambda + K_1 + K_3 & -K_3 \\ -K_3 & m_2 \lambda^2 + b_2 \lambda + K_2 + K_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

COMO $A_{1,2} \neq 0 \Rightarrow \lambda$ É TAL QUE ANULA O DETERMINANTE (MODOS NORMAIS)

CASOS PARTICULARES

① $K_3 = 0$ (SEM ACOPLAMENTO)

$$m_j \lambda^2 + b_j \lambda + K_j = 0$$

$$m_j \left(\lambda^2 + 2\gamma_j \lambda + \omega_j^2 \right) = 0$$

$$\boxed{r = -\gamma_j \pm i\sqrt{\omega_j^2 - \gamma_j^2}}$$

P/ $j = 1$ $\quad \left(r = \gamma_1 \pm i\sqrt{\omega_1^2 - \gamma_1^2} \right)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2(r^2 + 2\gamma_2 r + \omega_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_2 = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = A_1 e^{\left(-\gamma_1 + i\sqrt{\omega_1^2 - \gamma_1^2}\right)t} + A_1' e^{(-\gamma_1 - i\Gamma)t} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

P/ SOLUÇÕES REAIS, $A_1^* = A_1'$

MODO NORMAL 1 $\begin{cases} x_1 = A e^{-\gamma_1 t} \cos\left(\sqrt{\omega_1^2 - \gamma_1^2}\, t + \phi\right) \\ x_2 = 0 \end{cases}$

ANALOGAMENTE P/ $j = 2$

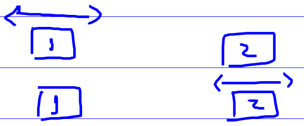
$$r = -\gamma_2 \pm i\sqrt{\omega_2^2 - \gamma_2^2} \longrightarrow A_1 = 0$$

MODO NORMAL 2 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = B e^{-\gamma_2 t} \cos\left(\sqrt{\omega_2^2 - \gamma_2^2}\, t + \varphi\right) \end{cases}$

NOTE QUE ESSES MODOS NORMAIS SÃO AQUELES ESPERADOS NO CASO DESACOPLADO

MODO 1 : $\quad A_1 \neq 0 \,,\; A_2 = 0$

MODO 2 : $\quad A_1 = 0 \,,\; A_2 \neq 0$



(2) $m_1 = m_2 = m \,,\; b_1 = b_2 = 0 \,,\; K_1 = K_2 = K$

$$\begin{pmatrix} m(r^2 + \omega^2 + \Omega^2) & -m\Omega^2 \\ -m\Omega^2 & m(r^2 + \omega^2 + \Omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

ONDE $\quad \omega^2 = K/m \qquad \Omega^2 = K_3/m$

$\Rightarrow \eta^2 + w^2 + \Omega^2 = \pm \Omega^2 \Rightarrow \boxed{\eta = \pm i\sqrt{w^2 + \Omega^2 \mp \Omega^2}}$

- 4 POSSÍVEIS η's, COMO NO CASO ①
- NOTE QUE APARECEM η E η^* (AOS PARES) PORQUE AS E.D.O's SÃO DE 2º GRAU

  * ESSES PARES TÊM AUTO-VETORES ASSOCIADOS $\{A_1, A_2\}$ SIMILARES

– SOLUÇÃO $\eta = \eta_a = i w$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m\Omega^2 & -m\Omega^2 \\ -m\Omega^2 & m\Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = A_2 = A$$

– SOLUÇÃO $\eta = \eta_b = -iw$

$$\Rightarrow A_1 = A_2 = B$$

– SOLUÇÃO $\eta = \eta_c = i\sqrt{w^2 + 2\Omega^2}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -m\Omega^2 & -m\Omega^2 \\ -m\Omega^2 & -m\Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2 = C$$

– SOLUÇÃO $\eta = \eta_d = -i\sqrt{w^2 + 2\Omega^2} \Rightarrow A_1 = -A_2 = D$

<u>SOLUÇÃO GERAL</u>

$$\begin{cases} x_1 = Ae^{\eta_a t} + Be^{\eta_b t} + Ce^{\eta_c t} + De^{\eta_d t} \\ x_2 = Ae^{\eta_a t} + Be^{\eta_b t} - Ce^{\eta_c t} - De^{\eta_d t} \end{cases}$$

COMO $x_{1,2} \in \mathbb{R}$ E $\eta_a = \eta_b^*$

$\eta_c = \eta_d^*$

$\Rightarrow A = B^*$ E $C = D^*$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a_1 \cos(wt + \phi_1) + a_2 \cos(\sqrt{w^2 + 2\Omega^2}\, t + \phi_2) \\ x_2 = a_1 \cos(wt + \phi_1) - a_2 \cos(\sqrt{w^2 + 2\Omega^2}\, t + \phi_2) \end{cases}$$

$a_1, a_2, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$ E DEPENDEM DAS CONDIÇÕES INICIAIS

- AGORA ESTÁ CLARO QUE AS 4 SOLUÇÕES $\eta_{a,b,c,d}$ CORRESPONDEM A 2 MODOS APENAS

• OS AUTOVETORES CORRESPONDENTES DESCREVEM AS OSCILAÇÕES ASSOCIADAS

MODO 1  C.M.: X

MODO 2  COORD. RELATIVA : x

$$\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ x &= x_1 - x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= X + \tfrac{1}{2}x \\ x_2 &= X - \tfrac{1}{2}x \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(2\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2 \right) + \frac{1}{2} k \left(2X^2 + \frac{1}{2} x^2 \right) + \frac{1}{2} k_3 x^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(2m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}(2k)X^2}_{E_X} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(k_3 + \frac{1}{2}k\right)x^2}_{E_x}$$

$$E_X = \frac{1}{2}(2m)\left[\dot{X}^2 + \omega_X^2 X^2 \right]$$

$$E_x = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\left[\dot{x}^2 + \omega_x^2 x^2 \right]$$

NOTE QUE NÃO HÁ ACOPLAMENTO ENTRE x E X

$$\begin{cases} \omega_X^2 = \dfrac{2k}{2m} = \omega^2 & \text{MODO 1} \\ \omega_x^2 = \dfrac{k_3 + \frac{1}{2}k}{m/2} = \omega^2 + 2\Omega^2 & \text{MODO 2} \end{cases}$$

DETERMINADOS $a_{1,2}$ E $\phi_{1,2}$ (PELAS COND. INICIAIS)

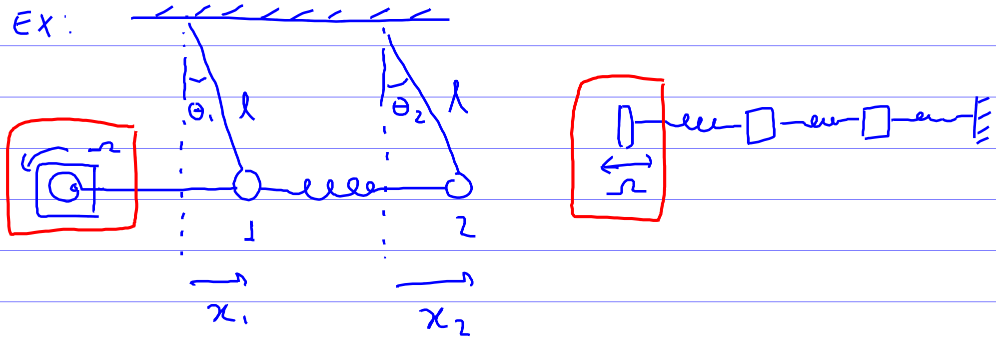
$$\Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = a_1 \cos(\omega_X t + \phi_1) \\ x = x_1 - x_2 = 2a_2 \cos(\omega_x t + \phi_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_X = \frac{1}{2}(2m)\,\omega_X^2 a_1^2 = k\, a_1^2 \\ E_x = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)\omega_x^2\, 4a_2^2 = (k + 2k_3)\, a_2^2 \end{cases}$$

LOGO, $$\boxed{E_X / E_x = \left(\frac{\omega_X a_1}{\omega_x a_2} \right)^2 = \frac{1}{1 + 2k_3/k} \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2}$$

OSCILAÇÕES ACOPLADAS FORÇADAS

EX:



P/ $\theta_{1,2} << 1$ (PEQUENAS OSCILAÇÕES)

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 \cong -m_1 g \ell \theta_1 - k(x_1 - x_2)\ell + N_0 \cos(\Omega t) \\ I_2 \ddot{\theta}_2 \cong -m_2 g \ell \theta_2 - k(x_2 - x_1)\ell \end{cases}$$

COMO $\sin\theta_i = x_i/\ell \Rightarrow x_i \simeq \theta_i \ell$

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 \cong -m_1 g \ell \theta_1 - k(\theta_1 - \theta_2)\ell^2 + N_0 \cos(\Omega t) \\ I_2 \ddot{\theta}_2 \cong -m_2 g \ell \theta_2 - k(\theta_2 - \theta_1)\ell^2 \end{cases}$$

SOLUÇÃO GERAL: $\theta_i(t) = \theta_{i,\text{HOMOGÊNEA}} + \theta_{i,\text{PARTICULAR}}$

ESTRATÉGIA:
1. ENCONTRA-SE $\theta_{i,\text{HOMOGÊNEA}}$
2. COM OS MODOS NORMAIS, DESACOPLA-SE O SISTEMA E VERIFICA-SE COMO O TERMO EXTERNO EXCITA OS MODOS NORMAIS
3. ENCONTRA-SE $\theta_{\text{PARTICULAR}}$ P/ OS MODOS NORMAIS

MÃOS À OBRA:

POR SIMPLICIDADE, CASO SIMÉTRICO $m_1 = m_2 = m$

$\Rightarrow I_1 = I_2 = m\ell^2$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(g/\ell + \frac{k}{m}\right)\theta_1 - \frac{k}{m}\theta_2 \cong \frac{N_0}{m\ell^2}\cos(\Omega t) \\ \ddot{\theta}_2 + (g/\ell + k/m)\theta_2 - k/m\,\theta_1 \cong 0 \end{cases}$$

DEFININDO $g/\ell = w_g^2$, $\frac{k}{m} = w_k^2$, $\frac{N_0}{m\ell^2} = \alpha_0$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + w_g^2 + w_k^2 & -w_k^2 \\ -w_k^2 & \frac{d^2}{dt^2} + w_g^2 + w_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

① SOLUÇÃO HOMOGÊNEA

$$\bullet\ \Theta_i = A_i e^{\lambda t} = A_i e^{i\omega t}$$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_g^2 + \omega_k^2 & -\omega_k^2 \\ -\omega_k^2 & -\omega^2 + \omega_g^2 + \omega_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

MODO 1: $\omega_1 = \pm \omega_g \to A_1 = A_2 \to \Theta_1 = \theta_1 + \theta_2$

MODO 2: $\omega_2 = \pm\sqrt{\omega_g^2 + 2\omega_k^2} \to A_1 = -A_2 \to \Theta_2 = \theta_1 - \theta_2$

② DESACOPLAR O SISTEMA

$$\begin{cases} \ddot\theta_1 + \ddot\theta_2 + \omega_g^2(\theta_1+\theta_2) = \alpha_0 \cos(\Omega t) \\ \ddot\theta_1 - \ddot\theta_2 + (\omega_g^2 + 2\omega_k^2)(\theta_1 - \theta_2) = \alpha_0 \cos(\Omega t) \end{cases}$$

OU SEJA, $\begin{cases} \ddot\Theta_1 + \omega_1^2 \Theta_1 = \alpha_0 \cos(\Omega t) \\ \ddot\Theta_2 + \omega_2^2 \Theta_2 = \alpha_0 \cos(\Omega t) \end{cases}$

SABEMOS A SOLUÇÃO HOMOGÊNEA

$$\Theta_i = B_i \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

③ AGORA PROCURAMOS UMA SOLUÇÃO PARTICULAR
(NESTE CASO SIMÉTRICO, AMBOS OS MODOS
SÃO FORÇADOS IGUALMENTE)

$$\Theta_{i,p} = C_i \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow (-\Omega^2 + \omega_i^2)\, C_i \cos(\Omega t) = \alpha_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \Theta_{i,p} = \frac{\alpha_0}{\omega_i^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$$

FINALMENTE,

$$\Theta_i(t) = B_i \cos(\omega_i t + \phi_i) + \frac{\alpha_0}{\omega_i^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$$

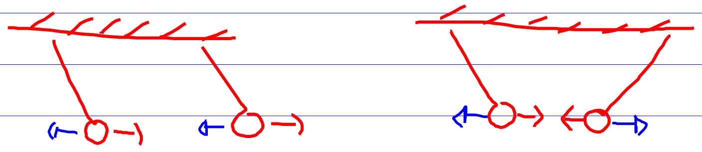
↓

RESSONÂNCIA

CASO $\Omega = \omega_1$ OU $\Omega = \omega_2$

SOLUÇÃO GERAL,
$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2) \\ \theta_2 = \frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta_1 = \underbrace{B_1' \cos(\omega_1 t + \phi_1)}_{\text{MODO 1}} + \underbrace{B_2' \cos(\omega_2 t + \phi_2)}_{\text{MODO 2}} + \frac{\alpha_0}{2}\left(\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2}\right)\cos(\Omega t) \\ \Theta_2 = B_1' \cos(\omega_1 t + \phi_1) - B_2' \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \frac{\alpha_0}{2}\left(\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2}\right)\cos(\Omega t) \end{cases}$$



PODERIAMOS TER ADICIONADO UM TERMO VISCOSO

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + 2\gamma\dot{\theta}_1 + \omega_g^2\theta_1 + \omega_k^2(\theta_1 - \theta_2) = \alpha_0 \cos(\Omega t) \\ \ddot{\theta}_2 + 2\gamma\dot{\theta}_2 + \omega_g^2\theta_2 + \omega_k^2(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

COMO MANTIVEMOS A SIMETRIA $1 \leftrightarrow 2$, OS MODOS $A_1 = A_2$ E $A_1 = -A_2$ AINDA DESACOPLAM O SISTEMA. LOGO,

$$\ddot{\Theta}_i + 2\gamma\dot{\Theta}_i + \omega_i^2\Theta_i = \alpha_0 \cos(\Omega t)$$

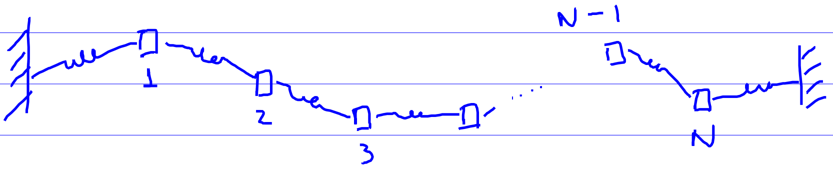
$$\Rightarrow \Theta_i = B_i e^{-\gamma t}\cos(\omega_i t + \phi_i) + \frac{\alpha_0}{\sqrt{(2\gamma\Omega)^2 + (\omega_i^2 - \Omega^2)^2}}\cos(\Omega t + \delta)$$

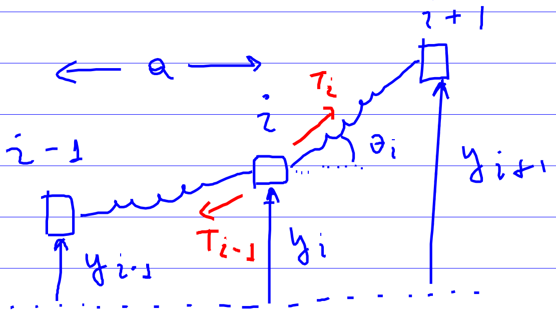
COM $\tan\delta = \dfrac{2\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega_i^2}$

COMO ESPERADO, RESSONÂNCIAS QUANDO A FREQUÊNCIA EXTERNA SE IGUALA A UMA DAS FREQUÊNCIAS NORMAIS (NATURAIS) DO SISTEMA $\Omega = \omega_1$ OU $\Omega = \omega_2$

N OSCILADORES ACOPLADOS

EX: OSCILAÇÕES TRANSVERSAIS





P/ PEQUENAS OSCILAÇÕES $y_i << a$

$$T_i \approx T \quad , \quad \sin\theta_i \approx \theta_i \approx \tan\theta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{a}$$

EQ. DE NEWTON:

$$m\ddot{y}_i = \frac{T_0}{a}\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right)$$

ESTRATÉGIA: $y_i = A_i\, e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \quad -\omega^2 A_i = \omega_0^2 \left(A_{i-1} - 2A_i + A_{i+1}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 & 0 & \cdots \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ ω^2 SÃO OS AUTO-VALORES DE

$$\begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 & \cdots \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & \\ 0 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 & \ddots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIDIAGONAL

AS SOLUÇÕES SÃO DO TIPO

$$A_j = A\, e^{ikaj}$$

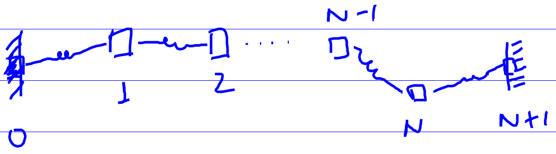
$$\Rightarrow \left(2\omega_0^2 - \omega^2\right) e^{ikaj} - \omega_0^2 \left(e^{ika(j-1)} + e^{ika(j+1)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2\omega_0^2 - \omega^2 - \omega_0^2\, 2\cos(ka) = 0$$

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 \left(1 - \cos ka\right) = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = 2\omega_0 \left|\sin \frac{ka}{2}\right|}$$

QUAIS SÃO OS POSSÍVEIS VALORES DE K?



$$\begin{cases} Re(A_0) = 0 \\ Re(A_{N+1}) = 0 \end{cases}$$

(LEMBRE-SE QUE $A = A' + i A''$

• $A' \cos(k \cdot a \cdot 0) - A'' \sin(k \cdot a \cdot 0) = 0$

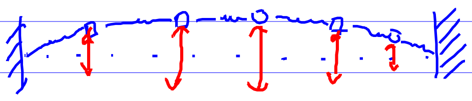
$$\Rightarrow A' = 0$$

• $A'' \sin\left(ka(N+1)\right) = 0$

P/ QUE $A'' \neq 0$ $\Rightarrow$ $ka(N+1) = m\pi,\ m \in \mathbb{Z}^*$

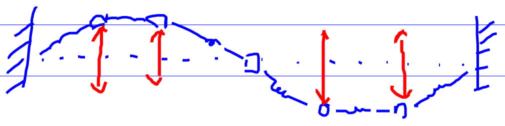
OU SEJA, $k = \dfrac{\pi}{a(N+1)}, \dfrac{2\pi}{a(N+1)}, \ldots$

MODO 1 : $k = k_1 = \dfrac{\pi}{a(N+1)}$, $\omega = \omega_1 = 2\omega_0 \sin\left(\dfrac{k_1 a}{2}\right)$

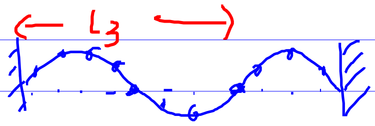


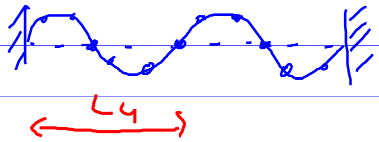
$A_j = \sin(k_1 a j)$

MODO 2 : $k = k_2 = \dfrac{2\pi}{a(N+1)}$, $\omega = \omega_2 = 2\omega_0 \sin\left(\dfrac{k_2 a}{2}\right)$

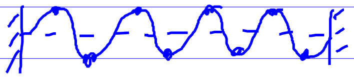


$A_j = \sin(k_2 a j)$

MODO 3 : 

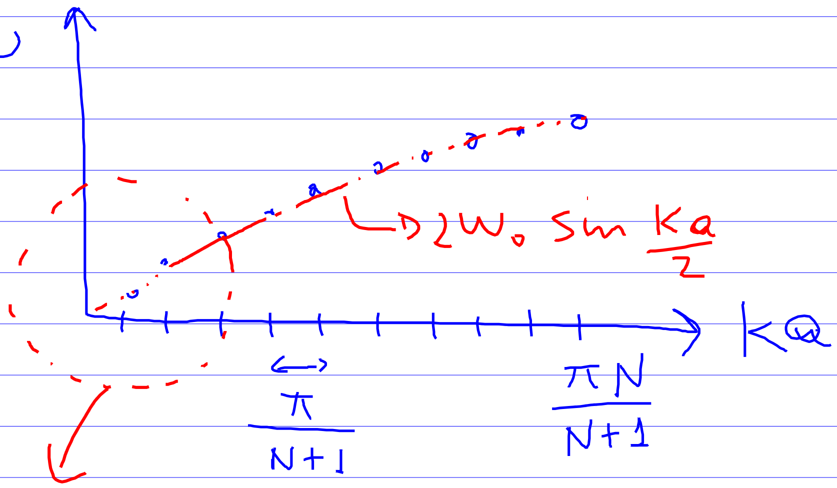
MODO 4 : 

⋮

MODO N : 

$$A_j = \sin\left(K(aj + L)\right) = \sin\left(Kaj\right)$$

$$\Rightarrow \quad KL = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{2a(N+1)}{m}}$$



P/ $Ka \ll 1$

$$\omega \approx 2\omega_0 \frac{Ka}{2} \rightarrow \boxed{\text{RELAÇÃO DE DISPERSÃO} \quad \omega = cK \quad \text{LINEAR}}$$

$c = \omega_0 a$

= VELOCIDADE DO SOM